

*Corneliu Ruscescu*  
*Cosma Tudose*

**MODELE**  
*și*  
**MODELARE**  
*în*  
**FIZICĂ**



EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ

CORNELIU RUSESCU • COSMA TUDOSE

MODELE  
ȘI MODELARE  
ÎN FIZICĂ



EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ

BUCUREȘTI, 1987

## CUPRINS

<i>Prefață</i> . . . . .	9
<i>Capitolul 1. Modelarea în fizică</i> . . . . .	11
1.1. Noțiunea de model . . . . .	11
1.2. Folosirea modelării în studierea fizicii . . . . .	14
<i>Capitolul 2. MODELAREA PRIN SIMILITUDINE</i> . . . . .	17
2.1. Chestiuni generale . . . . .	17
2.2. Similitudine statică . . . . .	18
2.3. Similitudine dinamică . . . . .	21
<i>Capitolul 3. MODELAREA PRIN ANALOGIE</i> . . . . .	30
3.1. Modelul mașină simplă . . . . .	30
3.1.1. Pîrghii . . . . .	32
3.1.2. Asociație de scripete fix cu unul mobil . . . . .	33
3.1.3. Palanul diferențial . . . . .	33
3.1.4. Planul înclinat . . . . .	34
3.1.5. Șurubul . . . . .	35
3.1.6. Sistem de scripeți . . . . .	36
3.1.7. Sistem de bare articulate . . . . .	37
3.2. Modelarea sistemelor ce execută oscilații armonice . . . . .	38
3.2.1. Pendulul elastic format din mai multe resorturi legate în serie . . . . .	40
3.2.2. Pendulul fizic . . . . .	43
3.2.3. Mișcarea oscilatorie a coloanei de lichid în două vase comunicante . . . . .	44
3.2.4. Pendulul de torsiune . . . . .	46
3.2.5. Pendulul bifilar . . . . .	47
3.2.6. Perioada de oscilație a unor sisteme simple . . . . .	49
3.2.7. Rezonatorul Helmholtz . . . . .	51
3.2.8. Circuitul oscilant . . . . .	53
3.3. Analogii electromecanice . . . . .	55
3.3.1. Modele analogice, mecanice, folosite pentru înțelegerea fenomenelor privind curentul electric continuu . . . . .	55
3.3.2. Analogii rezultate din studiul circuitelor electrice de curent continuu și al celor de curent alternativ . . . . .	62



<b>Capitolul 4. EXEMPLE DE MODELARE IDEALĂ</b>	75
4.1. Modelele de gaze	75
4.2. Energia	77
4.2.1. Energia potențială. Exemple.	78
4.2.2. Energia cinetică. Teoremă	80
4.2.3. Conservarea energiei	80
4.2.4. Energia unui condensator	87
4.2.5. Energia câmpului magnetic produs de un circuit electric	92
4.2.6. Expresia energiei în teoria relativității	94
<b>Capitolul 5. MODELUL CÂMPURILOR FIZICE POTENȚIALE PLANE</b>	114
5.1. Câmp fizic de forțe. Generalități.	114
5.2. Proprietățile câmpurilor vectoriale plane. Introducere matematică	122
5.3. Aplicarea metodei reprezentărilor conforme în problema câmpurilor potențiale plane	132
5.4. Studiul unor câmpuri electrostatice plane particulare	133
5.4.1. Câmpul electrostatic produs de o dreaptă infinită, încărcată electric uniform	133
5.4.2. Câmpul unui plan infinit încărcat electric	138
5.4.3. Câmpul produs de două plane paralele și infinite, încărcate electric cu semne contrare	139
5.4.4. Transformarea definită de funcția analitică $Z = \sin z$	139
5.5. Studiul unor câmpuri plane în electrocINETICĂ	143
5.5.1. Introducere	143
5.5.2. Câmpul electrostatic produs de două fire paralele, având densități liniare de sarcină egale și de semn contrar	145
5.5.3. Transformarea $Z = f(z) = z^n$ în care $n$ poate fi orice număr real	152
5.5.4. Transformarea $Z = f(z) = z^{3/2}$	154
5.6. Modelarea experimentală a câmpurilor potențiale plane	156
5.6.1. Metoda electrolitică a inelelor lui Nobili	156
5.6.2. Metoda băii electrolitice	158
<b>Capitolul 6. MODELAREA ÎN FIZICA ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ</b>	161
6.1. Modele atomice	161
6.1.1. Modelul static al atomului (J. J. Thomson).	161
6.1.2. Modelul atomic planetar (Rutherford)	163
6.1.3. Modelul atomic cuantic al lui Bohr	169
6.1.4. Modelul atomic al lui Sommerfeld	179
6.1.5. Modelul vectorial al atomului	190
6.1.6. Modelul ondulatoriu al atomului	196
6.2. Modele nucleare	208
6.2.1. Probleme generale privind nucleul atomic	208
6.2.2. Modelul picătură	212

6.2.3. Modelul în pături	218
6.2.4. Alte modele nucleare	221
<b>Capitolul 7. MODELAREA ÎN STUDIAREA CORPULUI SOLID</b>	223
7.1. Starea cristalină și starea amorfă	223
7.2. Forțe de legătură	225
7.3. Structura cristalină ideală a corpului solid	227
7.4. Imperfecțiuni și defecte în rețeaua cristalină reală	234
7.5. Starea electronilor liberi în solide	239
7.5.1. Modelul electronilor liberi	239
7.5.2. Modelul benzilor de energie	247
7.6. Proprietățile fizice ale solidelor	256
7.6.1. Proprietăți mecanice	256
7.6.2. Proprietăți termice	261
7.6.3. Proprietăți electrice	270
7.6.4. Proprietăți magnetice	283
<b>Bibliografie</b>	299



## PREFAȚĂ

„Ceea ce e bun este de două ori mai bun  
dacă este scurt”.

SCHOPENHAUER

Întotdeauna, în domeniul fizicii, în virtutea permanentei tendințe de concretizare, atât cercetătorul, pentru a circumscrie sfera investigațiilor sale, și pedagogul, pentru a-și fixa ideile, au recurs, în mod intuitiv, la noțiunea de model chiar atunci când ea nu era perfect clarificată.

Folosirea modelelor a devenit însă o necesitate imperioasă pe măsură ce fizica a început să abordeze studiul sistemelor complexe, a sistemelor ce depind din ce în ce de mai mulți parametri. Totuși, deși în stadiul actual al dezvoltării fizicii și tehnicii, se vorbește mult despre modele și modelare, aceste noțiuni, precum și acele conexiuni lor, sînt foarte rar precizate în lucrările de specialitate și cu atât mai puțin concretizate prin exemple caracteristice. În această mică lucrare, fără a pretinde că am găsit calea cea mai bună, în special datorită posibilităților practic nelimitate de modelare, am urmărit să clarificăm în acest domeniu noțiunile de bază și să le fixăm prin exemple cît mai sugestive.

Lucrarea de față are un pronunțat caracter pedagogic și ea atare se adresează unor categorii largi de cititori, dar mai ales cadrelor didactice ce predau fizica sau materii de specialitate tehnică în învățămîntul general sau liceal de specialitate. Ea este utilă și studenților facultăților de fizică sau tehnice, care încep să facă primii pași în domeniul cercetării științifice și în bună măsură elevilor din ultimele clase de liceu, care manifestă o vădită înclinare spre studiul fizicii. În general lucrarea poate interesa orice profesionist, ale cărui preocupări au legătură cu studiul acestei discipline.

*Sîntem convinși că mulți dintre profesorii cu experiență și talentați din învățămîntul liceal, particularizînd multe dintre problemele expuse, prin simulare, le vor putea face accesibile elevilor, adîncind și lărgind astfel cercul de cunoștințe prevăzute în programele școlare. De altfel scopul pe care l-am urmărit nu a fost numai de a expune o cantitate limitată de cunoștințe, mai mult sau mai puțin cunoscute, ci mai ales de a pune la îndemîna cititorului și de a-i atrage atenția asupra unor metode utile, atît în practica pedagogică cît și în aceea de cercetare științifică.*

AUTORII

## Capitolul 1. MODELAREA ÎN FIZICĂ

„Sistematizarea și simplificarea sînt în esență primii pași spre asimilarea de cunoștințe. Adevăratul nostru dușman este necunoscutul”.

THOMAS MANN

### 1.1. Noțiunea de model

Evoluția științei și tehnicii implică pătrunderea din ce în ce mai adînc în esența fenomenelor naturii. Aceste fenomene se prezintă simțurilor noastre sub forme extrem de variate, rezultînd la rîndul lor din interacțiunea unui număr mare de factori. O parte dintre acești factori au un rol deosebit în fenomenele pe care le avem sub observație, în timp ce alții sînt auxiliari și lipsiți de importanță. Aceștia din urmă umbresc fenomenele în cauză — de aceea trebuie, dacă nu eliminați definitiv, cel puțin neglijăți într-o primă aproximație. Pentru eliminarea informațiilor secundare și punerea în valoare a elementelor fundamentale și esențiale sînt însă necesare cunoștințe profunde, atît teoretice cît și practice. Modelarea este una dintre metodele importante folosite astăzi în știință și tehnică, pentru obținerea unor astfel de rezultate.

Știința operează astăzi din ce în ce mai puțin cu entități considerate simple, omogene unele față de altele. În gîndirea modernă, dialectică, se impune din ce în ce mai mult categoria de sistem, caracterizat prin tipuri specifice de structuri, adică prin anumite forme de interacțiuni între elementele ce îl alcătuiesc. Sistemul este definit ca un ansamblu de elemente în interdependență, constituind un întreg organizat.

După natura structurilor și interacțiunilor specifice, sistemele se împart în: sisteme fizice, sisteme chimice, sisteme biologice, sisteme sociale etc.

La rîndul lor, sistemele fizice se pot clasifica în: sisteme macroscopice (sau termodinamice) și sisteme microscopice.

Un sistem macroscopic, de exemplu, este determinat simultan de parametrii lui mecanici, termici, electromagnetici (deci și optici) etc.

În studiile științifice și practice un rol important revine simulării sistemelor și situațiilor reale. Prin *simulare* înțelegem stabilirea unei relații de corespondență între două sisteme, fiecare dintre ele putând corespunde unei realități obiective sau unei abstracțiuni. Unul dintre sisteme se pretează mai bine studiului decât celălalt, fapt ce ne permite să ne facem o idee despre proprietățile celui de al doilea sistem, observind modul de comportare al primului. În acest caz sistemul ales pentru studiu poartă numele de model.

Se spune despre un sistem  $S_M$  că este *model* al sistemului  $S_0$  dacă se poate stabili o corespondență bine definită între  $S_M$  și  $S_0$ . Spre deosebire de sistemul  $S_0$  — numit *sistem original* — modelul  $S_M$  este înzestrat numai cu proprietăți esențiale și de aceea este mai sărac decât originalul. Fixarea proprietăților cit și a conexiunilor se stabilește printr-un sistem de axiome, pe baza căruia se dezvoltă teoria modelului.

Deci, vom putea defini *modelul* ca un sistem material sau abstract, care, fiind pus în corespondență cu un alt sistem dat anterior, va putea servi indirect studiului proprietăților acestui sistem mai complex (original) și cu care modelul prezintă o anumită analogie.

Nevoia de a modela realitatea este determinată de imposibilitatea de a aborda sub forma care ni se prezintă, dată fiind complexitatea ei inepuizabilă.

Un model se numește *izomorf* (de aceeași formă) dacă sistemul real (original) și modelul coincid într-o manieră completă, element cu element. De exemplu, modul în care negativul corespunde cu fotografia sa, cum corespunde un desen cu piesa executată după el, cum macheta corespunde originalului, cum soluțiile unei ecuații pot descrie procesele ce se produc într-un sistem etc.

Adeseori modelele izomorfe se dovedesc a fi extrem de complicate și, practic, imposibil de aplicat și realizat. De aceea prezintă mai mult interes crearea unor modele care să permită definirea numai a aspectelor esențiale a sistemelor reale, fără a se intra în detalii: de exemplu, cazul unei hărți geografice față de terenul ce-l reprezintă.

Modelele ale căror diferite elemente nu corespund decât în parte, mai mult sau mai puțin sistemului real, fără ca

să existe o corespondență perfectă de la element la element, se numesc modele omomorfe.

Izomorfismul și omomorfismul sînt susceptibile de o definiție matematică riguroasă în cadrul teoriei algebrice a grupurilor.

Fie  $X$  și  $Y$  grupurile. Dacă elementele acestor grupuri sînt legate printr-o corespondență biunivocă, astfel încît, pentru orice element  $a, b \in X$  și elementele ce le corespund  $a', b' \in Y$ , elementului  $c = ab$  îi va corespunde elementul  $c' = a'b'$ , se va spune că grupurile sînt izomorfe.

Grupurile izomorfe nu pot diferi decît prin natura elementelor lor și, poate, prin natura operațiilor definite pentru aceste grupuri.

În grupurile omomorfe, corespondența dintre grupuri este unilaterală. Se spune că aplicația grupului  $X$  în grupul  $Y$  este omomorfă, dacă fiecărui element din grupul  $X$  îi corespunde univoc un element determinat din grupul  $Y$ , în așa fel încît elementelor  $a, b \in X$  le corespund elementele  $a', b' \in Y$ , iar elementului  $ab = c$  îi corespunde elementul  $c' = a'b'$ . În cazul general al omomorfismului de forma  $X \rightarrow Y$ , diferite elemente din grupul  $X$  vor putea trece în cite un element dat din grupul  $Y$ , existînd însă și posibilitatea ca unele elemente din grupul  $X$  să nu treacă în grupul  $Y$ .

Rezultă că în procesul modelării există un sistem  $S_0$  ale cărui proprietăți urmează să fie modelate, pe care îl numim obiect modelat, sau original și un alt sistem  $S_M$  care constituie un model al originalului. Între original și model sînt corespondențe obiective, ce ne oferă posibilitatea să înlocuim în anumite privințe originalul cu modelul și să stabilim reguli de trecere de la informațiile obținute pe model la informațiile obținute pe original. În desfășurarea procesului modelării apar trei faze distincte:

- 1) trecerea de la original la model;
- 2) cercetarea pe model;
- 3) transferul pe original a rezultatelor obținute pe model.

Față de cercetarea directă pe original, cercetarea pe model prezintă avantajul că proprietățile sistemului ce constituie modelul sînt mai bine cunoscute și mai ușor de studiat. După cum s-a arătat mai sus, modelul poate fi izomorf sau omomorf, condiția de izomorfism nefiind necesară în modelare. Modelarea izomorfă este mai săracă



în proprietăți decît cea omomorfă. În general modelele folosite în știință nu sînt izomorfe cu originalul.

Trebuie menționat că cercetările pe model, din cauza neidentității modelului cu originalul, au o sferă mai restrînsă de valabilitate, originalul fiind mai complex decît modelul. Această lipsă va fi compensată, într-o cercetare ulterioară, de un alt model mai complex, mai perfecționat, care acoperă o parte mai mare din mulțimea de proprietăți a fenomenului dat, construit pe baza concluziilor la care s-a ajuns din confruntarea modelului anterior cu realitatea. La rîndul său și acesta va ceda locul altuia care va aproxima și mai bine realitatea ș.a.m.d. Rezultatul va fi apariția unui lanț de modele care se înlocuiesc succesiv unele pe celelalte, lanț în cadrul cărui se păstrează și se amplifică informația.

În esență limitarea posibilităților modelării se datorează următorilor factori :

1. Neglijării tuturor fenomenelor considerate într-o primă aproximație ca secundare, dar care, în urma modificării la scară a dimensiunilor (ca în cazul modelelor la scară redusă) sau în alte condiții de lucru (modelarea unui fenomen pe altul etc.) pot deveni la fel de importante ca și fenomenul principal.

2. Apariția unor noi fenomene, care din punctul de vedere al modelării prezintă un caracter parazit. Apariția acestor fenomene poate fi determinată : a) de modificarea scării ; b) de modificarea condițiilor de producere a fenomenului în instalație sau model față de situația reală ; c) de neglijarea structurii microscopice (moleculare sau atomice) a corpurilor care iau parte la formarea modelului, sau a căror evoluție este studiată.

3. Neglijarea completă a structurii sau a naturii corpurilor care iau parte la desfășurarea fenomenului studiat, ca, de exemplu, în cazul modelării pe calculatoare.

## 1.2. Folosirea modelării în studiul fizicii

Teoria modelării constituie astăzi un procedeu cu multiple posibilități de aplicare în cele mai variate domenii ale științei și tehnicii. Datorită trăsăturilor lor generale, noțiunile de model și de modelare s-au dovedit extrem de fertile, încît putem spune că modelarea constituie un mijloc de investigație deosebit de util și fecund, aplicabil

oricărei discipline, dar mai ales în fizică. În cele ce urmează ne vom ocupa de modelarea sistemelor fizice, avînd ca obiectiv principal studiul fizicii.

În acest scop vom căuta să facem o clasificare a modelelor din punct de vedere metodic. Practica arată că modelele se construiesc prin similitudine, prin analogie sau prin idealizare.

*Modelarea prin similitudine* constă în extinderea asemănării geometrice asupra unor mărimi fizice din domeniul mecanicii, al transmisiei de căldură, al electromagnetismului etc. Modelul folosit este de obicei o machetă ce reproduce originalul, la dimensiuni reduse și ale cărei proprietăți se studiază în laborator cu scopul de a fi apoi extinse asupra originalului. Macheta reproduce aproape în toate amănuntele originalul, de aceea modelarea prin similitudine se apropie cel mai mult de modelarea izomorfă. Este folosită în construcția de avioane, de nave, în termotehnică, în electrotehnică etc. și în procesul de instruire, pentru a reprezenta intuitiv obiectul original inaccesibil, din cauza marilor lui dimensiuni.

*Modelul analogic* este un sistem abstract sau concret care se deosebește ca formă geometrică de original, dar care are aceleași proprietăți cu ale lui, se îndepărtează de modelul izomorf, fiind mai apropiat de modelul omomorf.

*Modelul ideal* are un loc intermediar între teorie și experiment. Modelele de acest tip pot fi construite din diferite imagini grafice, formule matematice, ce sugerează sau prezintă o anumită asemănare cu originalul, cum ar fi schemele unor mașini, schemele unor circuite electrice etc., sau modele matematice, ele formînd un sistem de obiecte abstracte, utilizate cu precădere în teorie. Evoluția lor poate fi descrisă matematic tocmai datorită acestei idealizări. Modelele ideale sînt în general omomorfe.

Bineînțeles că această clasificare nu este riguroasă, fiindcă dintre tipurile de modele arătate pot include elemente din celelalte două feluri de modele. Studiul fizicii dovedește că folosirea modelării ca metodă de predare a cunoștințelor, cît și ca metodă a structurii acestora în programe și manuale, dă rezultate foarte bune. Folosită cu abilitate, ea poate servi pentru a face legătura între diferitele capitole ale fizicii, care, la prima vedere, par că se deosebesc substanțial, ea poate servi la generalizarea, abstractizarea și la sistematizarea unor vaste domenii ale fizicii.

Face posibilă însușirea și aplicarea în practică a unei mari cantități de cunoștințe într-un timp mai scurt. Având în vedere faptul că în momentul de față asistăm la încercări de îmbunătățire a modului de studiere a fizicii în învățământul de cultură generală și de specialitate, credem că metoda modelării va deveni și mai utilă în predarea și studierea fizicii în anii următori.

## Capitolul 2. MODELAREA PRIN SIMILITUDINE

„Adevărul nu există numai în lumea ce ne înconjoară sau în modelele noastre, ci și în procesul de corelație a modelelor și a lumii”.

E. A. SINGNER

### 2.1. Chestiuni generale

În construcția navală, în construcția avioanelor, la turbinele hidraulice, la instalațiile de transmisie a energiei, înainte de trecerea la construcția sistemului original sînt necesare încercări pe machete care reproduc originalul la dimensiuni mult mai reduse. Asemănarea geometrică nu este însă suficientă pentru reproducerea fenomenelor pe machetă, identică ca în instalația în mărime naturală. În afară de aceasta, trebuie realizată similitudinea mecanică-fizică a mărimilor (parametrilor), care joacă un rol preponderent în desfășurarea fenomenului. Această similitudine trebuie stabilită astfel încît ecuațiile diferențiale sau integrale care descriu fenomenul la scara naturală să concorde cu ecuațiile corespunzătoare pentru model. Metoda modelării prin similitudine se întrebuițează cu succes pretutindeni unde soluționarea pe cale analitică a ecuațiilor diferențiale ale fizicii, în condițiile de unicitate impuse, întâmpină dificultăți pe care mijloacele actuale ale analizei matematice superioare nu le pot învinge, unde însă practica pretinde totuși soluții numerice.

Principiul similitudinii dă posibilitatea să se obțină din ecuațiile care descriu fenomenele în cauză, chiar fără rezolvarea lor, concluzii de importanță fundamentală. Într-adevăr, un grup de fenomene asemănătoare este caracterizat prin existența unor relații funcționale între mărimile caracteristice fenomenelor grupului, relații satisfăcute de toate aceste fenomene. În consecință, transformările care permit trecerea de la un fenomen al grupului la alt fenomen al acestuia depind de un număr de parametri cărora,

dându-li-se un anumit sistem de valori, se poate trece pe rând prin toate fenomenele grupului.

Intrucit oricare din fenomenele unui grup poate fi descris de ecuațiile funcționale ale clasei de care aparțin fenomenele, rezultă că transformările unui grup de fenomene trebuie să lase invariante ecuațiile clasei de care aparține grupul. De aceea, pentru ca similitudinea să fie efectivă trebuie ca un fenomen să nu depindă, în desfășurarea sa, de sistemul de unități de măsură folosit la stabilirea ecuațiilor care descriu această desfășurare.

Ținând seama de aceste considerații, fără a recurge la o dezvoltare generală și riguroasă din punct de vedere matematic, vom ilustra în cele ce urmează teoria similitudinii, prin exemple simple, din care se pot întrevădea și dificultățile, când metoda trebuie aplicată în probleme complexe.

## 2.2. Similitudine statică

Vom începe cu un exemplu simplu de rezistență a materialelor. Se știe că orice grindă dreaptă asupra căreia acționează diferite sarcini concentrate sau continue se deformează, încovoiindu-se. Se demonstrează în cursurile de specialitate că în această situație și în limita deformărilor elastice, linia care unește centrele de greutate ale tuturor secțiunilor drepte, transversale, ale grinzii defor-

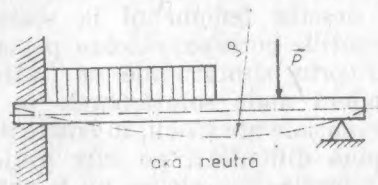


Fig. 2.1.

mate, numită axă neutră (fig. 2.1), este o curbă continuă având în orice punct al ei curbura exprimată prin relația

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI},$$

$\rho$  fiind raza de curbură,  $E$  — modulul de elasticitate al materialului din care este confecționată grinda, iar  $M$  și  $I$  sînt respectiv momentul încovoiător și momentul de inerție al secțiunii considerate.

Folosindu-se această relație se pot dimensiona barele ale căror modele au fost încercate în prealabil la flambaj. Sînt solicitate la flambaj barele supuse la compresiune de o forță  $\bar{P}$  (fig. 2.2).

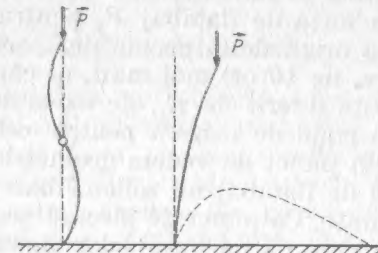


Fig. 2.2.

Vom observa că dacă lungimea barei este mai mare, se produce o încovoiere și bara rezistă la o sarcină mult mai mică decît aceea stabilită pentru compresiune. Se spune că bara flambează și de aceea ea nu mai poate fi calculată, simplu, la compresiune.

Flambajul este datorit mai multor cauze: sarcina  $\bar{P}$  nu poate fi niciodată perfect centrică. Vom avea deci momente încovoiitoare, care vor produce încovoierea barei.

La rîndul ei, piesa nu poate fi niciodată perfect dreaptă. Sarcina  $\bar{P}$  va avea deci față de diferitele secțiuni, excentricități diferite care produc momente încovoiitoare.

Materialul nu poate fi perfect omogen. Rezistențele nemaifiind uniform repartizate, vor da deci un moment încovoiător. În toate aceste cazuri, momentul încovoiător ia naștere din cauza excentricității forței, tinde să mărească excentricitatea; avem deci un caz de echilibru nestabil. Din această cauză forțele exterioare nu mai găsesc opunerea rezistențelor interioare. Se produc astfel săgeți neadmisibile cu un element de construcție sau se poate chiar ca baza să se rupă. S-au stabilit formule pentru calculul pieselor la flambaj. Totuși se preferă uneori ca înainte de a se trece la confecționarea piesei respective să se facă încercări pe modele, mai ales în cazul cînd secțiunea pieselor este mai complicată și cînd se urmărește să se evite abuzul de coeficienți de siguranță, care ar duce la supra-dimensionarea elementelor de construcție.



Vom lua următorul exemplu: un corp de revoluție, de forma unei bare model, se supune unor încercări cu încărcare la flambaj centric. Fie  $P_1 = 125$  N forța pentru care modelul poate rezista la flambaj. Notăm cu  $E_1$  modulul de elasticitate al materialului din care este realizat modelul. Se cere forța de flambaj  $P_2$  pentru execuția în formă naturală a originalului geometric, asemenea cu dimensiunile liniare, de 10 ori mai mari, al cărui modul de elasticitate  $E_2$  este diferit de  $E_1$ , de exemplu  $E_2 = 2 E_1$ . Se presupune că tipul de reazăm pentru cele două bare este asemenea din punct de vedere geometric și elastic și că forțele critice de flambaj nu solicită barele dincolo de limita de elasticitate. Ca punct de plecare servește ecuația arătată mai sus, care dă curbura celor două linii elastice asemenea.

Pentru ecuația originalului  $S_0$  obținem

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{P_2 y_2}{E_2 I_2},$$

iar pentru modelul  $S_M$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{P_1 y_1}{E_1 I_1},$$

în care  $\rho_1, \rho_2$  sînt razele de curbura,  $M_1 = P_1 y_1$ ,  $M_2 = P_2 y_2$  sînt momentele încovoietoare, iar  $I_1, I_2$  sînt momentele de inerție ale secțiunilor barei (despre care se știe că sînt proporționale cu puterea a patra a unei lungimi).

Împărțind cele două relații, rezultă

$$\frac{\frac{1}{\rho_2}}{\frac{1}{\rho_1}} = \frac{\frac{P_2 y_2}{E_2 I_2}}{\frac{P_1 y_1}{E_1 I_1}} = \frac{P_2 y_2}{P_1 y_1} \cdot \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}.$$

Prin trecerea de la model la original, potrivit principiului similitudinii, lungimile trebuie să treacă în raportul de asemănare geometrică  $\lambda$ .

Deci

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \lambda \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1}{\lambda^4}.$$

De aceea, forța de flambaj  $P_2$  pentru execuția principală se calculează cu ajutorul legii de transpunere,

$$P_2 = P_1 \lambda^2 \frac{E_2}{E_1}, \text{ de unde } P_2 = 125 \cdot 10^2 \cdot 2 = 25\,000 \text{ N.}$$

### 2.3. Similitudine dinamică

Vom considera un model machetă  $S_M$ , care se mișcă într-un fluid real (viscos), cu o anumită viteză  $u_1$ , sau, ceea ce este același lucru, modelul se află în repaus și fluidul se mișcă cu aceeași viteză față de model. Modelul are o formă definită și este asemenea din punct de vedere geometric cu originalul, la o scară definită, încît este suficient să se cunoască una dintre dimensiunile modelului pentru a putea determina atît celelalte dimensiuni ale modelului cît și ale originalului. Vom presupune că fluidul este incompresibil (din această categorie fac parte și gazele în mișcare pînă la viteze apreciabil mai mici decît viteza sunetului) și că mișcarea sa se face în regim staționar, în absența unor forțe exterioare.

În aceste condiții, mișcarea generală a unui fluid real (viscos) este descrisă de ecuația lui Navier-Stokes, dată mai jos sub formă vectorială, într-un caz particular, anume în regim staționar și irotational,

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \cdot \Delta \vec{v}, \quad (2.1)$$

care, transpusă în coordonate carteziane, devine

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \Delta v_x, \quad (2.1')$$

în care  $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$  este variația componentei  $v_x$  a vitezei unei particule oarecare de fluid în funcție de coordonatele ei,  $\frac{\partial p}{\partial x}$  este variația presiunii în direcția  $x$ ,  $\rho$ —densitatea fluidului (invariabilă),  $\eta$ —viscozitatea dinamică (invariabilă), iar

$\eta \cdot \Delta v_x = \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$  este componenta forței de frecare cu particulele învecinate, în direcția  $x$ .

Cele două cazuri de mișcare, ale originalului  $S_0$  și modelului  $S_M$ , fiind asemenea, pentru a se putea trece de la model la original sau invers, ecuațiile diferențiale care descriu fenomenele, în cele două cazuri trebuie să fie identice. Pentru aceasta, mărimile de aceeași natură care intră în ecuațiile diferențiale (2.1') pentru original și model trebuie să fie proporționale (în rapoarte ce pot fi cunoscute).

Ca atare, între lungimi vor exista relațiile

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{l_2}{l_1} = \lambda, \quad (2.2)$$

$l_1, l_2$  fiind distanțele dintre două puncte analoge din model și din original, iar  $(x_1, y_1, z_1)$  și  $(x_2, y_2, z_2)$  coordonatele acestor puncte. În mod asemănător, pentru viteze,

$$\frac{v_{x_2}}{v_{x_1}} = \frac{v_{y_2}}{v_{y_1}} = \frac{v_{z_2}}{v_{z_1}} = \frac{u_2}{u_1} = \alpha_v, \quad (2.2')$$

în care  $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$  sînt vitezele fluidului în diferite puncte din apropierea modelului,  $v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2}$  sînt vitezele în punctele analoge față de original,  $u_1$  și  $u_2$  sînt vitezele relative ale modelului, respectiv originalului, față de fluid.

În mod asemănător, pentru presiuni, densități și viscozități vom avea

$$\frac{p_2}{p_1} = \alpha_p, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \alpha_\rho \text{ și, respectiv, } \frac{\eta_2}{\eta_1} = \alpha_\eta. \quad (2.2'')$$

Ținînd seama de aceste notații, mișcarea unei particule de fluid din original, descrisă de ecuația,

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} + v_{z_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial z_1} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\eta_1}{\rho_1} \cdot \Delta v_{x_1},$$

$$\dots$$

va fi asemenea cu aceea a particulei de fluid în mișcarea corespunzătoare din model, dacă va fi satisfăcută relația obținută prin introducerea valorilor lui  $x_2, y_2, z_2, v_{x_2},$

$v_{y_2}, v_{z_2}, p_2, \rho_2, \eta_2$  deduse din (2.2, (2.2'), (2.2'')) în relația de mai sus și anume,

$$\frac{\alpha_v^2}{\lambda} \left( v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} + v_{z_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial z_1} \right) = - \frac{1}{\alpha_\rho} \cdot \frac{\alpha_p}{\lambda} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\alpha_\eta}{\alpha_\rho} \frac{\alpha_v}{\lambda^2} \frac{\eta_1}{\rho_1} \cdot \Delta v_{x_1},$$

$$\dots$$

Pentru ca cele două ecuații diferențiale să fie identice, este necesar ca

$$\frac{\alpha_v^2}{\lambda} = \frac{\alpha_p}{\alpha_\rho \lambda} = \frac{\alpha_\eta \alpha_v}{\alpha_\rho \lambda^2}.$$

Din această dublă egalitate se poate deduce egalitatea următoare

$$\frac{\alpha_v^2}{\lambda} \cdot \frac{\alpha_\rho \lambda^2}{\alpha_\eta \alpha_v} = \frac{\alpha_v \alpha_\rho \lambda}{\alpha_\eta} = 1,$$

din care, înlocuind factorii de proporționalitate prin valorile lor (2.2), (2.2'), (2.2'')) obținem

$$\frac{u_1 \rho_1 l_1}{\eta_1} = \frac{u_2 \rho_2 l_2}{\eta_2} = \frac{u \rho l}{\eta} = \text{const} = \text{Re},$$

observînd că  $l$  este o dimensiune oarecare luată drept unitate. Raportul  $\frac{\eta}{\rho} = \nu$  poartă numele de viscozitate cinematică; cu ajutorul ei, relația precedentă se scrie

$$\frac{u l}{\nu} = \text{Re};$$

Re poartă numele de criteriul sau numărul lui Reynolds, mărimile  $u, l, \nu$  avînd dimensiunile

$$\langle \nu \rangle = \frac{L^2}{T}, \quad \langle l \rangle = L, \quad \langle u \rangle = \frac{L}{T},$$

ceea ce arată că Re este adimensional. Se observă că acest număr conține toate datele problemei:  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  visco-

zitatea cinematică presupusă constantă, viteza relativă  $u$  a fluidului (sau a mobilului în raport cu fluidul) și lungimea  $l$ . Din aceasta din urmă se pot deduce toate dimensiunile (liniare) date ale corpului de studiat și care trebuie să apară în soluțiile ecuației diferențiale Navier-Stokes (2.1) prin condițiile la limită.

Principiul similitudinii arată că dacă în mișcarea fluidelor, cind asupra lor nu acționează forțe exterioare și influența gravitației poate fi neglijată, toate variațiile de viteză și presiune sînt funcție de mărimea  $Re$  și că problemele sînt analoge cind coeficienții lui Reynolds au aceleași valori. Cu alte cuvinte, dacă din datele obținute experimental pe model, se urmărește obținerea unor concluzii valabile pentru original, experimentarea trebuie să se facă astfel încît numerele Reynolds ale modelului și originalului să fie egale.

Pentru a ilustra cele de mai sus să analizăm următorul exemplu simplu: cu ce viteză incidentă trebuie să acționeze aerul, într-un tunel aerodinamic, în condiții de similitudine, asupra unui model cu dimensiunile reduse la scara  $\frac{1}{25}$ , dacă originalul se construiește pentru o viteză de 30 km/h?

Pentru a avea condiții de similitudine trebuie ca în cele două cazuri numerele lor Reynolds să fie egale,

$$\frac{u_2 \rho_2 l_2}{\eta_2} = \frac{u_1 \rho_1 l_1}{\eta_1},$$

în care  $u_2, l_2$  sînt viteza avionului și, respectiv, o lungime caracteristică acestuia,  $\rho_2$  și  $\eta_2$  sînt densitatea și respectiv viscozitatea aerului; mărimile  $u_1, l_1, \rho_1, \eta_1$  corespund modelului. Se obține

$$u_1 = u_2 \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (2.3)$$

Dacă experiența se face în aer, în aceleași condiții atît în cazul modelului, cît și originalului, se obține

$$u_1 = u_2 \frac{l_2}{l_1}.$$

Introducînd datele numerice, găsim că  $u_1 = 300 \cdot 25 = 7500$  km/h = 2100 m/s, viteză care întrece cu mult viteza sunetului în aer; deci se va experimenta într-un

domeniu de viteze în care ecuația (2.1) Navier-Stokes nu mai descrie fenomenul. Pentru a învinge această dificultate, anume pentru a scădea viteza fluidului în tunelul aerodinamic, trebuie ca în formula (2.3) să se reducă termenul

$\frac{\eta_1}{\rho_1}$ , fie făcînd încercarea cu aer sub presiune, ceea ce mărește pe  $\rho_1$  (și nu influențează apreciabil pe  $\eta_1$ ), fie ca încercarea să se execute în apă, a cărei viscozitate cinematică  $\nu_1 = \frac{\eta_1}{\rho_1}$  variază cu temperatura și este de 10 ... 20 de ori mai mică decît a aerului.

Numărul lui Reynolds are o mare importanță în hidro- și aerodinamică, în problemele transmiterii căldurii prin fluide în mișcare, în studiul cîrgerii lichidelor și gazelor prin conducte, în încercările care se fac, pentru a determina, în bazine sau în tunelele aerodinamice, pe modele-machetă, mărimea și distribuția forțelor care vor acționa în situații reale asupra prototipurilor de nave sau avioane ce urmează să se construiască etc. Ca exemplificare, vom arăta cum se poate determina, în principiu, portanța și rezistența la înaintare a unui anumit profil de aripă de avion, înainte de a se construi originalul, făcîndu-se încercări în tunelul aerodinamic, pe un model-machetă. Am arătat că în conformitate cu ecuația diferențială a lui Navier-Stokes, parametri care determină mișcarea staționară a unui fluid real (viscos) incompresibil, în jurul unui corp sînt viteza  $u$ , densitatea  $\rho$ , presiunea  $p$ , viscozitatea  $\eta$  a fluidului, iar prin condițiile la limită, una dintre dimensiunile liniare  $l$  ale corpului, deoarece forma corpului fiind cunoscută, se pot deduce toate celelalte dimensiuni. Între toți acești parametri există o dependență funcțională, care nu poate fi, în general, găsită prin metodele analizei matematice.

Urmează că forța  $\vec{F}$  ce va acționa asupra unui corp ce se mișcă, în aceste condiții, într-un fluid, va avea expresia

$$F = pS = f(\rho, u, l, \eta),$$

fiind funcție de parametri care determină mișcarea fluidului.

Considerînd că această funcție se poate dezvolta într-o serie infinită după puterile variabilelor independente, vom putea scrie

$$F = f(\rho, u, l, \eta) = \sum_i k_i \cdot \rho^{\alpha_i} \cdot u^{\beta_i} \cdot l^{\gamma_i} \cdot \eta^{\delta_i}, \quad (2.4)$$

$k_i$  fiind un coeficient numeric fără dimensiuni.



Este evident că toți termenii acestei serii infinite trebuie să aibă aceeași ecuație dimensională, identică cu aceea a forței  $F$ . Prin urmare, este suficient să se considere un singur produs și să se scrie

$$\langle F \rangle = \langle \rho^\alpha \cdot u^\beta \cdot l^\gamma \cdot \eta^\delta \rangle.$$

Mărimile care intră în această expresie au următoarele dimensiuni:

$$\langle F \rangle = MLT^{-2}, \quad \langle \rho \rangle = ML^{-3}, \quad \langle u \rangle = LT^{-1},$$

$$\langle l \rangle = L, \quad \langle \eta \rangle = ML^{-1}T^{-1}.$$

Introducând aceste relații în ecuația dimensională de mai sus, după transformări simple găsim

$$\begin{aligned} MLT^{-2} &= M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma M^\delta L^{-\delta} T^{-\delta} = \\ &= M^{\alpha+\delta} L^{-3\alpha+\beta+\gamma-\delta} T^{-\beta-\delta}. \end{aligned}$$

Comparând exponenții lui  $M$ ,  $L$ ,  $T$  găsim trei ecuații,

$$\alpha + \delta = 1, \quad -3\alpha + \beta + \gamma - \delta = 1, \quad \beta + \delta = 2.$$

Determinăm din aceste trei ecuații (insuficiente pentru determinarea celor patru necunoscute) pe  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  în funcție de  $\delta$  și obținem

$$\alpha = 1 - \delta, \quad \beta = 2 - \delta, \quad \gamma = 2 - \delta.$$

Astfel conform cu (2.4) avem

$$\begin{aligned} F &= \sum_i k_i \rho^{1-\delta} u^{2-\delta} l^{2-\delta} \eta^\delta = \rho u^2 l^2 \sum_i k_i \left( \frac{\eta}{\rho u l} \right)^\delta = \\ &= \rho u^2 l^2 \sum_i k_i \left( \frac{\nu}{v} \right)^{-\delta}, \end{aligned}$$

în care  $\nu = \frac{\eta}{l}$  este vîscozitatea cinematică.

Se obișnuiește ca în studiul comportării în mișcarea în aer a profilelor de aripă de avion, să se introducă în formulă în loc de  $l^2$  suprafața  $S$  a planului  $AB$  (care conține coarda  $AB$ ) (fig. 2.3), iar în loc de  $\rho$  să se scrie  $\frac{\rho}{2}$ . Acest

lucru implică o modificare a coeficienților numerici  $k_i$ , încît în cele din urmă vom scrie

$$F = \frac{\rho}{2} u^2 S \sum_i k_i \left( \frac{ul}{\nu} \right)^{-\delta},$$

în care  $\frac{ul}{\nu}$  este numărul lui Reynolds. Vom avea deci

$$F = \varphi(\text{Re}) \frac{\rho}{2} u^2 S,$$

unde  $\varphi(\text{Re})$  nu poate fi determinată pe considerații de dimensiuni, dar, în orice caz depinde numai de coeficienții numerici  $k_i$  și de numărul lui Reynolds.

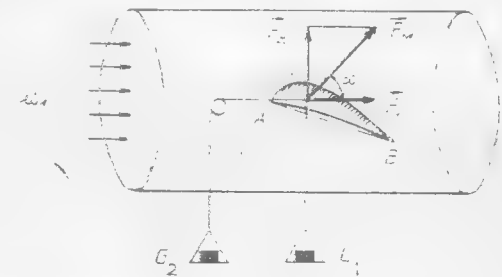


Fig. 2.3.

Avînd în vedere că numerele Reynolds ale modelului machetă și ale originalului trebuie să fie egale, rezultă că  $\varphi(\text{Re})$  va avea în ambele cazuri aceeași valoare, pe care o vom nota cu  $C$ . Experiența confirmă că forțele care acționează asupra originalului și machetei vor fi date respectiv de următoarele formule:

$$F_o = C \frac{\rho_2}{2} u_2^2 S_2,$$

$$F_M = C \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1.$$

Constanta  $C$  se determină experimental în tunelul aerodinamic, menționînd totuși că realizarea tehnică este destul de complexă.

Partea principală a unui tunel aerodinamic, în care se încearcă modelele-machetă, o constituie un cilindru de dimensiuni mari (pentru ca pereții lui să nu exercite ac-

țiuni perturbatoare), în care se poate sufla un curent de aer uniform și de viteză dată. Într-un astfel de tunel se introduce, spre exemplu, macheta profilului de aripă de avion pe care dorim să o experimentăm. Aceasta este supusă unui curent de aer de viteză  $u_1$ , calculată cum s-a arătat mai sus (păstrându-se egalitatea numerelor lui Reynolds pentru original și machetă). Legind convenabil acest profil într-un punct  $N$ , ales prin diferite tatonări pentru a-i realiza înclinarea dorită, cu o serie de corzi prevăzute cu platane, forțele  $F_z$  și  $F_x$  pot fi măsurate cu ajutorul maselor puse în ambele platane (Fig. 2.3). Făcând diferite încercări, vom putea determina experimental valorile lui  $G_1$  și  $G_2$ , astfel încît

$$F_M = \sqrt{F_z^2 + F_x^2} = \sqrt{G_1^2 + G_2^2} = C \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1,$$

de unde

$$C = \frac{\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}{\frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1}.$$

Întrucît toate mărimile din membrul al doilea pot fi măsurate direct, se obține astfel coeficientul  $C$  pe care îl vom folosi pentru a determina forța  $F_0$  ce se exercită asupra aripii de avion în mișcarea sa prin aer.

$F_z$  și  $F_x$ , care poartă, respectiv, numele de portanță și rezistență la înaintare, sînt egale la rîndul lor cu  $G_1$  și  $G_2$ , avînd, după cum ne putem da ușor seama, valorile

$$F_z = G_1 = F_M \sin \alpha = C \sin \alpha \cdot \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1 = C_z \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1$$

și

$$F_x = G_2 = F_M \cos \alpha = C \cos \alpha \cdot \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1 = C_x \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1,$$

în care constantele  $C_z$  și  $C_x$  (cu ajutorul cărora se calculează portanța și rezistența la înaintare în mișcarea în aer a profilului original), se determină experimental pe baza relațiilor de mai sus, astfel încît

$$C_z = \frac{G_1}{\frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1} \quad \text{și} \quad C_x = \frac{G_2}{\frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1}.$$

O aplicație interesantă este folosirea teoriei similitudinii la evaluarea rezistenței clădirilor la acțiunea cutremurelor de pămînt. În afara cutremurelor puternice, se produc destul de des cutremure slabe, înregistrate de seismografe sensibile. Aceste vibrații ale scoarței Pămîntului au anumite frecvențe proprii, caracteristice regiunii în care se produc. Cunoscîndu-se oscilațiile proprii ale scoarței Pămîntului, se construiesc modele de clădiri, care sînt supuse la vibrații de diferite frecvențe. Se urmărește ca aceste modele, supuse la vibrații, să posede cu totul alte oscilații proprii, decît cele ale scoarței Pămîntului din regiunea respectivă. Modelele astfel confecționate servesc apoi la construcția în mare a clădirilor. Se procedează astfel, întrucît s-a constatat că atunci cînd oscilațiile proprii ale clădirilor au aceeași frecvență cu acelea provocate terenului de cutremure, clădirile intră în rezonanță, iar cutremurul devine extrem de distrugător.

### Capitolul 3. MODELAREA PRIN ANALOGIE

„... dar analogiile, deși ne ispitesc totdeauna cel mai tare, sînt și cele mai false dintre toate ispitele care ne fascinează spiritul”.

MARIN PREDA

Modelarea prin analogie cere ca două fenomene analoage, de natură fizică diferită, să fie descrise matematic de ecuații cu aceeași structură. Modelarea prin analogie, spre deosebire de cea prin similitudine, nu presupune asemănare perfectă între model și original, ci doar analogia lor. Metoda constă în construirea unui sistem  $S_M$ , a cărui descriere matematică este aceeași cu a sistemului original  $S_O$ , deși sînt de natură diferită. Analogia dintre sistemele  $S_O$  și  $S_M$  devine model atunci cînd, pe baza ei, din cercetarea lui  $S_M$  se obține o cunoaștere în plus, referitoare la sistemul  $S_O$ . Dintre posibilitățile de modelare prin analogie, vom discuta mai jos modelul de mașină simplă și modelarea sistemelor ce execută mișcări oscilatorii armonice.

#### 3.1. Modelul mașină simplă

Mașinile simple sînt sisteme mecanice cu legături complete sau sisteme cu un singur grad de libertate. Asupra lor acționează două sau mai multe forțe. În cazul general, asupra mașinii acționează o forță  $\vec{P}$ , numită forță activă, cu ajutorul căreia se urmărește deplasarea altei forțe  $\vec{R}$ , numită rezistență. Mașinile simple se folosesc în practică fie pentru o amplificarea a forțelor, fie pentru o utilizare mai avantajoasă a lor.

Pentru a stabili raportul dintre forța activă și cea rezistentă, vom considera, într-o primă aproximație, că legăturile dintre diferitele piese care compun mașina simplă sînt astfel încît frecarea este nulă. Vom recurge în același timp la principiul lucrurilor mecanice virtuale, enunțat sub forma: pentru ca sistemul ce formează o

mașină simplă să fie în echilibru, într-o poziție oarecare, este necesar și suficient, ca dînd sistemului o deplasare virtuală<sup>1</sup> oarecare, compatibilă cu legăturile, suma lucrurilor mecanice virtuale a forțelor direct aplicate să fie nulă;

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{F}_i = 0,$$

$\vec{F}_i$  fiind forțele, iar  $\delta \vec{F}_i$  deplasările corespunzătoare.

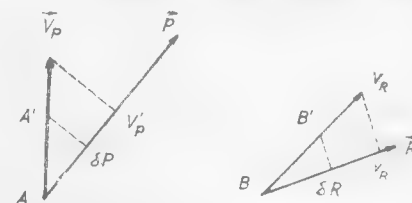


Fig. 3.1.

În virtutea acestui principiu, modelul mașină simplă se poate concepe ca o „cutie neagră” asupra căreia acționează cele două forțe  $\vec{P}$  și  $\vec{R}$  (fig. 3.1). Pentru a găsi condiția de echilibru, fără frecare, dintre cele două forțe, se imprimă mașinii o deplasare virtuală unică, compatibilă cu legăturile. Fie  $\delta P$  proiecția deplasării  $AA'$  a punctului de aplicație al forței  $\vec{P}$  pe direcția sa și  $\delta R$  proiecția deplasării  $BB'$  a punctului de aplicație al forței  $\vec{R}$  pe direcția sa.

Conform principiului lucrurilor virtuale, condiția de echilibru este

$$\vec{P} \cdot \delta P + \vec{R} \cdot \delta R = 0, \quad (3.1)$$

de unde

$$\frac{P}{R} = - \frac{\delta R}{\delta P} \quad (3.2)$$

Împărțind cu  $\delta t$ , timpul în care se produce deplasarea, și trecînd la limită, în locul deplasărilor virtuale se obțin vitezele virtuale, astfel încît se poate scrie

$$Pv_P + Rv_R = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{P}{R} = - \frac{v_R}{v_P}.$$

<sup>1</sup> Denumire improprie folosită în mecanică, în virtutea tradiției; este echivalentă cu aceea de deplasare posibilă.



Se obține astfel principiul vitezelor virtuale, ce exprimă forma statică a transmisiei lucrului mecanic în mașini. În limbaj curent, acest principiu se exprimă astfel: ce se câștigă în forță se pierde în viteză.

Principiul lucrurilor mecanice virtuale exprimă unul dintre aspectele principiului conservării energiei și anume că energia transmisă sistemului prin lucrul mecanic al forței active, se regăsește integral în lucrul mecanic transmis de sistem prin forța rezistentă.

### 3.1.1. Pîrghii

Se numește pîrghie un corp rigid asupra căruia acționează două forțe  $\vec{P}$  și  $\vec{R}$  și care se poate roti în jurul unui punct de sprijin  $O$  (fig. 3.2). Fie  $l_1$  și  $l_2$  brațele pîrghiei. Se

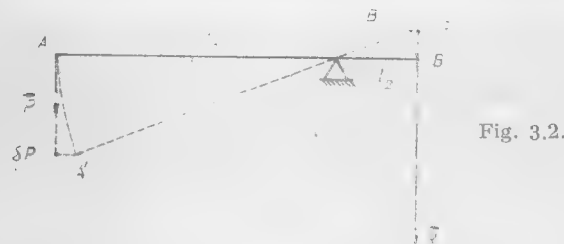


Fig. 3.2.

dă o deplasare  $AA'$ , compatibilă cu legăturile punctului de aplicație  $A$  al forței  $\vec{P}$ ; la rîndul său punctul de aplicație  $B$  al forței  $\vec{R}$  se va deplasa cu  $BB'$ . Proiecțiile deplasărilor  $AA'$  și  $BB'$  pe direcția forțelor  $\vec{P}$  și  $\vec{R}$  vor fi  $\delta P$  și, respectiv,  $\delta R$ . Din examinarea figurii, obținem

$$\frac{\delta P}{\delta R} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Conform relației (3.2) și ținînd seama că proiecțiile  $\delta P$  și  $\delta R$  au semne contrare, se poate scrie

$$P \cdot \delta P - R \cdot \delta R = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{P}{R} = \frac{\delta R}{\delta P},$$

deci

$$\frac{P}{R} = \frac{l_2}{l_1},$$

adică am obținut cunoscuta lege a pîrghiilor, conform căreia forțele ce acționează asupra unei pîrghii în echilibru sînt invers proporționale cu brațele pîrghiei.

### 3.1.2. Asociație de scripete fix cu unul mobil

Forța  $\vec{P}$  se aplică firului trecut peste scripetele fix, iar forța  $\vec{R}$  se aplică în axul scripetelui mobil (fig. 3.3). Între proiecția  $\delta P$  a deplasării punctului de aplicație a forței  $\vec{P}$  și proiecția  $\delta R$  a deplasării punctului de aplicație a forței  $\vec{R}$  există relația

$$\delta P = -2\delta R. \quad (3.3)$$

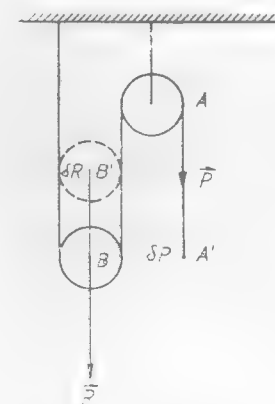


Fig. 3.3.

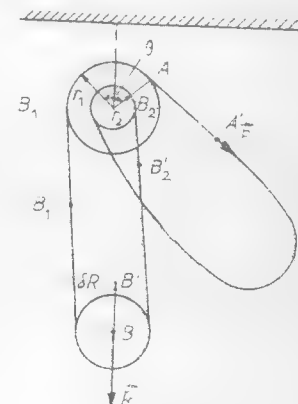


Fig. 3.4.

Aplicînd principiul lucrurilor mecanice virtuale (3.1) și ținînd seama de (3.3), rezultă

$$2P - R = 0 \quad \text{sau} \quad P = \frac{R}{2},$$

adică forța activă este jumătate din valoarea forței rezistente.

### 3.1.3. Palanul diferențial

Palanul diferențial (fig. 3.4) este format din două discuri coaxiale ce se rotesc împreună, cu profil special pentru lanț, precum și dintr-un scripete mobil, folosind un lanț fără sfîrșit. La o deplasare  $AA' = \delta P$  a punctului de apli-

cație al forței  $\vec{P}$ , sistemul de discuri fixe se va roti cu un unghi  $\theta$ , iar orice punct al lanțului trecut peste discul mare de rază  $r_1$  se va ridica cu o lungime

$$AA' = B_1B'_1 = r_1\theta.$$

În același timp, orice punct al porțiunii de lanț trecut peste discul mic de rază  $r_2$  va coborî cu o lungime

$$B_2B'_2 = r_2\theta,$$

încît punctul de aplicație al forței  $\vec{R}$ , aplicată în axul scripetelui mobil, se va înălța cu lungimea

$$\delta R = BB' = \frac{B_1B'_1 - B_2B'_2}{2} = \frac{(r_1 - r_2)\theta}{2}.$$

Aplicînd principiul lucrurilor mecanice virtuale (3.1), obținem

$$\vec{P} \cdot \delta P + \vec{R} \cdot \delta R = 0 \text{ sau } P \cdot AA' - R \cdot BB' = 0,$$

de unde

$$P \cdot r_1 \cdot \theta = R \frac{r_2 - r_1}{2} \cdot \theta$$

sau

$$P = \frac{R}{2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1}.$$

### 3.1.4. Planul înclinat

Planul înclinat este o suprafață plană ce face un unghi  $\alpha$  cu planul orizontal (fig. 3.5). Dacă pe un plan înclinat

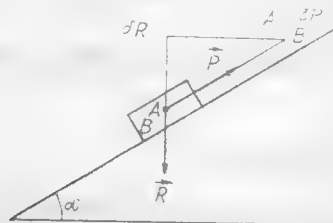


Fig. 3.5.

avem un corp greu, presupus fără frecare, asupra corpului acționează greutatea proprie  $\vec{R}$ , aplicată în centrul de

greutate al corpului. Pentru a ține corpul în echilibru pe planul înclinat, va trebui să acționăm asupra corpului cu o forță  $\vec{P}$ . Pentru a stabili condițiile de echilibru îi dăm corpului o deplasare  $AA' = \delta P$ , virtuală. Punctul de aplicație al forței  $\vec{R}$  va suferi la rîndul lui deplasarea  $BB'$ , a cărei proiecție pe direcția forței  $\vec{R}$  va fi

$$\delta R = BB' \cdot \sin \alpha = AA' \cdot \sin(-\alpha).$$

Aplicînd principiul lucrurilor mecanice virtuale (3.1), obținem

$$\vec{P} \cdot \delta P + \vec{R} \cdot \delta R = 0,$$

de unde

$$P \cdot AA' + R \cdot AA' \sin(-\alpha) = 0$$

sau

$$P = R \sin \alpha.$$

### 3.1.5. Șurubul

Șurubul este o mașină simplă ce face parte din aceeași categorie cu planul înclinat. El este format dintr-un ci-

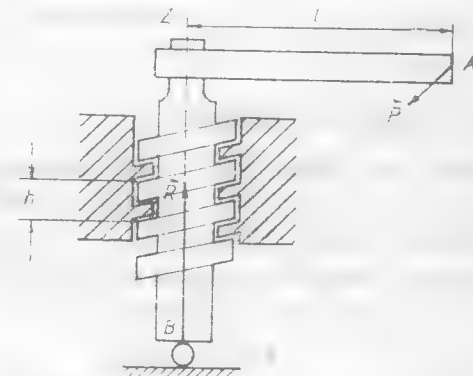


Fig. 3.6

lindru în care este săpat un șanț elicoidal, numit ghivent sau filet, și este terminat în partea superioară cu un tambur ce poate fi rotit (fig. 3.6). Șurubul se îmbină cu o piesă

numită piuliță, care, de cele mai multe ori, este fixă. Presupunind că frecările dintre șurub și piuliță se pot neglija, se acționează asupra șurubului cu forța  $\vec{P}$ , aplicată în  $A$ , prin intermediul unei manivele sau chei, la distanța  $l$  de axa  $Bz$  a șurubului și perpendiculară pe aceasta. Forța rezistentă  $\vec{R}$  își exercită acțiunea sa în lungul acestei axe.

Pentru o rotație elementară  $\delta\theta$ , compatibilă cu legăturile, proiecția pe direcția lui  $\vec{P}$  a arcului de elice infinit mic, descris de punctul  $A$  (care este un arc de cerc de rază  $l$  și deschidere  $\delta\theta$ ) va fi

$$\delta P = l \cdot \delta\theta,$$

în timp ce  $\delta R$  are valoarea

$$\delta R = -\frac{h}{2\pi} \cdot \delta\theta,$$

unde  $h$  este pasul șurubului.

Aceasta rezultă din faptul că înaintarea șurubului în lungul axei este proporțională cu rotația sa, pasul  $h$  al șurubului fiind egal cu valoarea cu care înaintează șurubul pentru o rotație completă. Condițiile de echilibru vor fi deci

$$P \cdot l \cdot \delta\theta + R \frac{h}{2\pi} \cdot \delta\theta = 0 \text{ sau } P = \frac{h}{2\pi l} \cdot R.$$

### 3.1.6. Sistem de scripeți

Un sistem de scripeți care poate fi folosit pentru ridicarea unei sarcini  $\vec{R}$  este redat în figura 3.7. Se dă punctului de aplicație al forței  $\vec{P}$  o deplasare  $\delta P = AA'$ . Punctul de aplicație al forței  $\vec{R}$  va căpăta la rândul său o deplasare  $\delta R = BB'$ . Din analiza figurii se constată că

$$-\delta P = 3 \delta R. \quad (3.4)$$

Aplicând sistemului principiul lucrurilor mecanice virtuale (3.1) și ținând seama de (3.4), obținem

$$\vec{P} \cdot \delta P + \vec{R} \cdot \delta R = 0; \quad -3P \cdot \delta R + R \cdot \delta R = 0,$$

de unde

$$P = \frac{R}{3}.$$

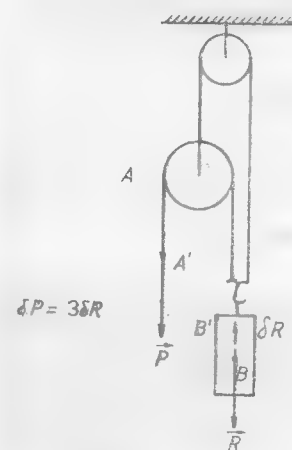


Fig. 3.7.

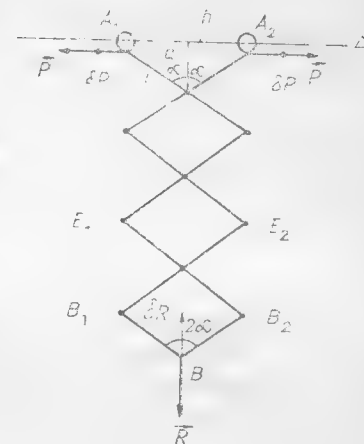


Fig. 3.8.

### 3.1.7. Sistem de bare articulate

Fie un sistem compus din 8 bare articulate (fig. 3.8).

Extremitățile  $A_1$  și  $A_2$  pot aluneca în lungul unei bare orizontale  $\Delta$ ; în  $B$  este suspendat un corp de greutate  $\vec{R}$ . Să determinăm mărimea forțelor  $\vec{P}$  ce trebuie să acționeze în punctele  $A_1$  și  $A_2$  pentru menținerea echilibrului.

Fie  $\delta P$  și  $\delta R$  deplasările virtuale corespunzătoare forțelor  $\vec{P}$  și  $\vec{R}$ .

Din examinarea figurii se constată că

$$a = l \sin \alpha \text{ și } h = l \cos \alpha.$$

Întrucât

$$\delta P = da = l \cos \alpha d\alpha, \text{ iar } dh = -l \sin \alpha d\alpha,$$

rezultă

$$\delta R = (8 - 1) dh = -(8 - 1) l \sin \alpha d\alpha.$$

Aplicind principiul lucrurilor mecanice virtuale, obținem

$$2\vec{P} \cdot \delta P + \vec{R} \cdot \delta R = 0,$$

deci

$$-2Pl \cos \alpha \, d\alpha + (8 - 1) Rl \sin \alpha \, d\alpha = 0,$$

de unde

$$P = \left(4 - \frac{1}{2}\right) R \operatorname{tg} \alpha$$

și în general cînd sistemul este compus din  $2n$  bare articulate,

$$P = \left(n - \frac{1}{2}\right) R \operatorname{tg} \alpha.$$

Aceeași modelare se poate aplica pentru determinarea raportului dintre forțele ce acționează asupra oricărei mașini simple, de exemplu în cazul muflei, palanului, troliului, penei etc. Se înțelege că modelarea bazată pe principiul lucrurilor mecanice virtuale este limitată; ea nu poate da, de exemplu, informații asupra randamentului mașinilor simple și nici nu poate fi, în general, folosită pentru a determina forțele de legătură ce acționează între diferitele piese ale mașinilor.

### 3.2. Modelarea sistemelor ce execută oscilații armonice

Legile mișcării oscilatorii armonice sînt identice cu legile mișcării proiecției  $m$  pe unul dintre diametrele  $BB'$

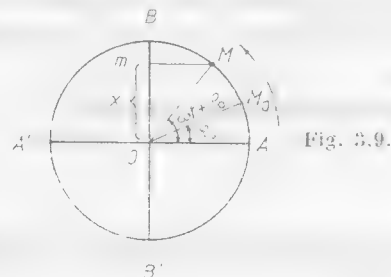


Fig. 3.9.

ale cercului, a unui punct  $M$  ce execută o mișcare circulară uniformă, cu viteza unghiulară  $\omega$  (fig. 3.9). Acest model

simplu și abstract poate servi, prin analogie, la determinarea perioadei de oscilație a oricărui sistem ce execută oscilații armonice.

Din examinarea figurii 3.9 se constată că distanța  $x$ , numită elongația punctului  $m$  (ce execută mișcarea oscilatorie) față de centrul  $O$  al cercului, luat ca reper, este dată de expresia

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.5)$$

$t$  fiind timpul,  $A$  amplitudinea mișcării (elongația maximă), egală cu raza cercului, iar  $\varphi_0$  se numește faza inițială și este egală cu unghiul care îl face raza cercului ce trece prin poziția inițială  $M_0(t=0)$  a punctului mobil  $M$ , cu diametrul  $AA'$ , perpendicular pe  $BB'$ .

Viteza punctului  $m$  va fi egală cu derivata lui  $x$  în raport cu timpul,

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0),$$

iar accelerația va fi derivata vitezei în raport cu timpul sau derivata a doua a lui  $x$  în raport cu timpul,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Ținînd seama de (3.5), obținem relația

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad (3.6)$$

care exprimă legea mișcării oscilatorii armonice. Rezultă că în mișcarea oscilatorie armonică accelerația este direct proporțională cu elongația; ele au semne opuse.

Relația (3.6) este o ecuație diferențială de ordinul doi, iar în analiza matematică se demonstrează că are întotdeauna o soluție unică, dacă sînt cunoscute condițiile inițiale care corespund, în cazul nostru, amplitudinii  $A$  și fazei inițiale  $\varphi_0$ . De aici urmează că indiferent de metoda folosită, dacă se găsește o soluție, care verifică această ecuație, ea va fi cea căutată.

De aceea, dacă pe orice cale se va găsi o lege de mișcare, exprimată printr-o relație de forma

$$a = -kx, \quad (3.7)$$



$k$  fiind o mărime fizică reală și pozitivă, îi vom putea întotdeauna asocia un număr  $\omega$  astfel încît

$$\omega^2 = k \text{ și } \omega = \sqrt{k}; \quad (3.8)$$

astfel vom putea găsi viteza unghiulară a unui punct, în mișcare circulară și uniformă, a cărei proiecție pe unul dintre diametrele cercului va avea mișcarea oscilatorie armonică reprezentată de relația (3.7). Legea de mișcare a acestui punct va fi exprimată de soluția

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin(t\sqrt{k} + \varphi_0), \quad (3.9)$$

care verifică relația (3.6).

Prin urmare, întotdeauna o relație de tipul (3.7) reprezintă o mișcare oscilatorie armonică bine determinată, care poate fi scrisă sub forma (3.5) sau (3.6).

Viteza unghiulară  $\omega$ , numită și pulsație, dată de relația (3.8), este caracteristică oricărei mișcări oscilatorii armonice. Se știe însă că în cazul mișcării circulare uniforme, perioada  $T$  este dată de relația

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.10)$$

Cum însă perioada mișcării oscilatorii armonice descrise de punctul  $m$  este egală cu aceea a mișcării circulare descrise de punctul  $M$ , pentru perioada oscilației armonice se obține relația

$$T = 2\pi \frac{1}{\sqrt{k}}. \quad (3.11)$$

Vom folosi această relație într-o serie de aplicații, pentru determinarea perioadei de oscilație, la diferite sisteme ce execută oscilații armonice, neglijînd de fiecare dată forțele de frecare.

### 3.2.1. Pendulul elastic format din mai multe resorturi legate în serie

Vom considera cazul unui pendul elastic, format din două resorturi de masă neglijabilă, de care este atârnat

un corp  $M$  asimilat cu un punct material (fig. 3.10). În poziția de echilibru (fig. 3.10, b) greutatea corpului este echilibrată de forța elastică a sistemului de resorturi. Cînd corpul este scos din poziția de echilibru și apoi este lăsat liber, el va începe să oscileze în jurul acestei poziții.

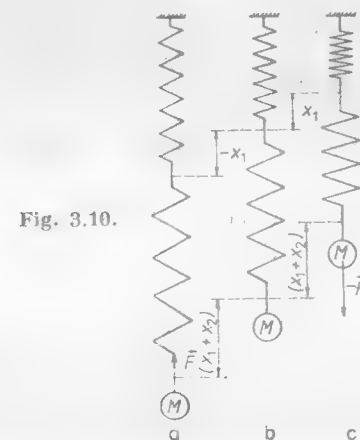


Fig. 3.10.

Mișcarea oscilatorie este produsă în orice moment de o forță elastică variabilă, cu care sistemul de resorturi acționează asupra corpului. Se cunoaște din experiență că alungirea  $x$  a unui resort este proporțională cu forța ce acționează asupra lui,  $F = -kx$ ; coeficientul de proporționalitate  $k$  depinde de natura resortului și se numește constanta resortului.

Considerăm două poziții oarecare ale corpului în mișcarea sa oscilatorie (fig. 3.10, a și 3.10 c). În aceste poziții resorturile vor acționa asupra corpului de masă  $m$  cu o forță  $F$ , ce tinde să readucă corpul spre poziția de echilibru. Conform legii a III-a a lui Newton, la rîndul lui, corpul de masă  $m$  va acționa asupra celor două resorturi cu o forță egală cu  $F$ , dar de semn contrar, producînd alungirile  $x_1$  și respectiv  $x_2$ , potrivit relațiilor

$$F = -k_1 x_1 \text{ și } F = -k_2 x_2$$

sau

$$F = -\frac{x_1}{\frac{1}{k_1}} \text{ și } F = -\frac{x_2}{\frac{1}{k_2}},$$

de unde

$$F = -\frac{x_1}{\frac{1}{k_1}} - \frac{x_2}{\frac{1}{k_2}} = -\frac{x}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}, \quad (3.12)$$

în care am notat cu  $x = x_1 + x_2$  deviația (elongația) corpului de masă  $m$  față de poziția de echilibru, iar  $k_1$  și  $k_2$  sînt constantele elastice ale celor două resorturi. S-a introdus semnul minus, deoarece forța  $F$  este întotdeauna îndreptată în sens contrar alungirii, respectiv comprimării lui  $x$ .

Aplicînd legea a II-a lui Newton,

$$F = ma$$

și ținînd seama de (3.12) se obține

$$ma = -\frac{x}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}.$$

Expresia arată că mișcarea sistemului de resorturi este o mișcare oscilatorie armonică a cărei coeficient de proporționalitate este

$$k = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)},$$

de unde, ținînd seama de (3.11), obținem pentru perioada de oscilație a pendulului elastic

$$T = 2\pi \sqrt{m \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)}.$$

Dacă avem în serie un număr mai mare de resorturi cu constante elastice diferite, evident că vom obține

$$T = 2\pi \sqrt{m \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \dots \right)}.$$

De asemenea, dacă pendulul elastic este format dintr-un singur resort de constantă  $k$ , urmînd același raționament,

vom obține relația

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

### 3.2.2. Pendulul fizic

Orice corp solid ce poate oscila în jurul unei axe ce trece printr-un punct  $O$  este un pendul fizic (fig. 3.11).

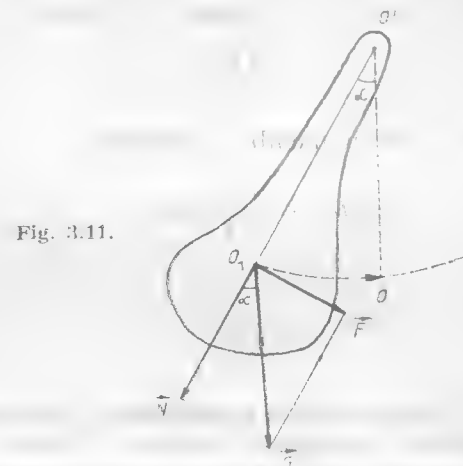


Fig. 3.11.

Din examinarea figurii se observă că, dacă pendulul este scos din poziția de echilibru  $O$ , greutatea  $\vec{G}$ , aplicată în centrul de greutate, se descompune în două forțe:  $\vec{F}$  și  $\vec{N}$ . Forța  $\vec{N}$  este anulată de reacțiunea punctului de sprijin, încît numai componenta  $\vec{F}$ , îndreptată spre poziția de echilibru, produce oscilațiile pendulului.

Forța  $\vec{F}$  este egală în modul cu

$$F = G \sin \alpha,$$

iar pentru amplitudini mici  $\alpha < 4^\circ - 5^\circ$ ,  $\sin \alpha \simeq \alpha$ , încît putem scrie

$$F = -G\alpha. \quad (3.13)$$

Această forță acționează în centrul de greutate al corpului și este îndreptată spre punctul  $O$ , care se consideră punct de origine a mișcării centrului de greutate.

Aplicind formula sub care se prezintă legea a doua a mecanicii în cazul mișcării de rotație, putem scrie

$$M = I \epsilon, \quad (3.14)$$

în care  $M$  este momentul forței  $\vec{F}$  față de punctul fix  $O'$ ,  $I$  — momentul de inerție al corpului față de axa de rotație ce trece prin  $O'$ , iar  $\epsilon$  accelerația unghiulară. Notind cu  $d$  distanța de la centrul de greutate  $O_1$  la  $O'$ , obținem

$$M = Fd = -G \alpha d = -mg \alpha d = I \epsilon \text{ sau}$$

$$\epsilon = - \frac{m g d}{I} \alpha.$$

Înmulțind cu  $d$  ambii membri, obținem

$$\epsilon d = - \frac{m g d}{I} \alpha d,$$

de unde

$$a = - \frac{m g d}{I} x, \quad (3.15)$$

în care  $a$  și  $x$  sînt accelerația tangențială și respectiv elon-gația centrului de greutate al corpului. Semnul minus s-a introdus deoarece forța  $\vec{F}$  are sensul contrar elongației  $x$ .

Observăm că relația (3.15) este expresia accelerației unei oscilații armonice, încît conform cu (3.7) putem scrie

$$k = \frac{m g d}{I},$$

de unde, conform cu (3.11),

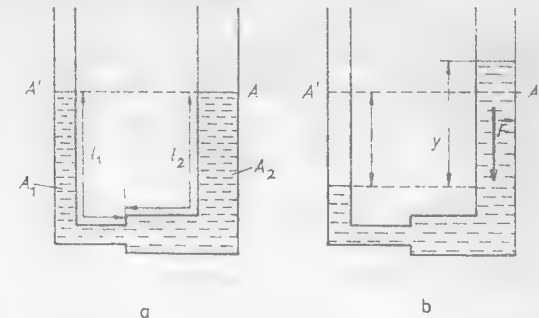
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g d}}.$$

### 3.2.3. Mișcarea oscilatorie a coloanei de lichid în două vase comunicante

Vom considera două vase comunicante cu ariile sec-tiunilor egale cu  $A_1$  și, respectiv,  $A_2$ , iar lungimile coloanelor de lichid egale cu  $l_1$  și  $l_2$  (fig. 3.12).

Dacă se denivelează lichidul și apoi se lasă liber, coloana de lichid va căpăta o mișcare oscilatorie în jurul poziției de echilibru  $AA'$ . Din examinarea figurii 3.12, *b*, se constată

Fig. 3.12.



că atunci cînd coloana de lichid cu secțiunea  $A_1$  are o abatere de la poziția de echilibru egală cu  $x$ , datorită presiunii hidrostatice, asupra întregii mase de lichid va ac-ționa o forță  $F$ , care tinde să readucă masa de lichid în poziția de echilibru și care este egală cu apăsarea coloanei  $y$  de lichid,

$$F = - \rho g A_2 y = - \rho g A_2 \left( x + \frac{x A_1}{A_2} \right) = - g (A_1 + A_2) x.$$

Pe de altă parte, aplicind legea a doua a mecanicii, obținem

$$F = ma = \rho (l_1 A_1 + l_2 A_2) a.$$

Egalind relațiile pentru  $F$ , se obține

$$\rho (l_1 A_1 + l_2 A_2) a = - \rho g (A_1 + A_2) x,$$

de unde

$$a = - \frac{g (A_1 + A_2)}{l_1 A_1 + l_2 A_2} x.$$

Se observă că oscilațiile coloanei de lichid sînt oscilații armonice, pentru care

$$k = \frac{g (A_1 + A_2)}{l_1 A_1 + l_2 A_2}$$

și deci perioada de oscilație va fi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 A_1 + l_2 A_2}{g(A_1 + A_2)}}.$$

Se poate verifica ușor că atunci când cele două vase comunicante au aceeași secțiune interioară,  $A_1 = A_2$ ,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}},$$

$l$  fiind lungimea întregii coloane de lichid.

### 3.2.4. Pendulul de torsiune

Pendulul de torsiune este format dintr-un corp legat de un fir vertical ce poate executa oscilații de rotație în planul orizontal (fig. 3.13).

Experiența arată că dacă scoatem pendulul din echilibru, răsucindu-l în jurul unei axe ce se confundă cu direcția firului, prin aplicarea unui cuplu de forțe, al cărui moment este  $M = 2rF$  (fig. 3.13), firul determină un cuplu de rezistență proporțional cu unghiul de răsucire  $\alpha$ , deci

$$M = 2rF = -K\alpha,$$

unde  $K$  este un coeficient de proporționalitate, între momentul cuplului de torsiune și unghiul  $\alpha$ .

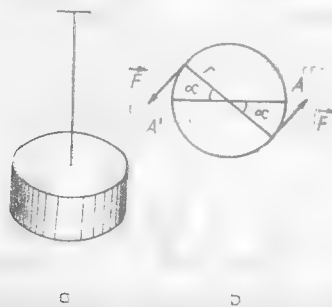


Fig. 3.13.

Egalind expresia momentului  $M$  din legea a doua a mecanicii aplicată corpurilor în mișcare de rotație,

$$M = I\epsilon,$$

cu expresia momentului forței  $F$  se obține

$$I\epsilon = -K\alpha \text{ sau } I\epsilon r = K\alpha r \text{ și } Ia = -Kx,$$

de unde

$$a = -\frac{K}{I}x,$$

$a$  și  $x$  fiind accelerația și, respectiv, deviația de la poziția de echilibru a unui punct ce se găsește la distanța  $r$  de axa de rotație.

Prin urmare, punctele pendulului de torsiune execută oscilații armonice, încît conform cu (3.7) și cu (3.11)

$$k = \frac{K}{I} \text{ sau } T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}.$$

### 3.2.5. Pendulul bifilar

Pendulul bifilar este compus dintr-o bară orizontală  $AB$ , de grosime neglijabilă și grea, de lungime egală cu

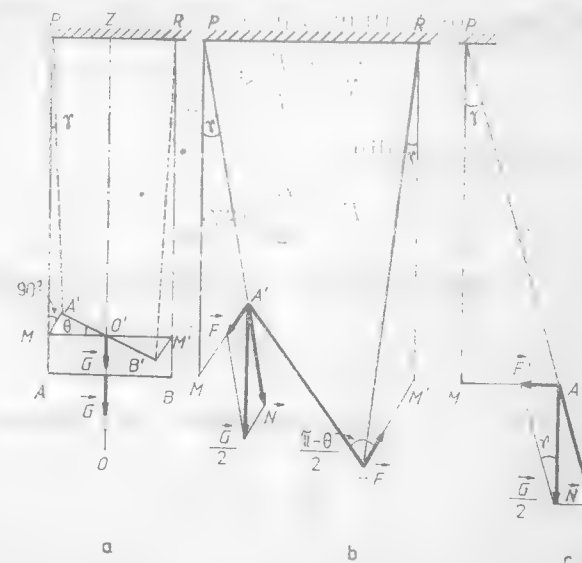


Fig. 3.14.

$l$ , suspendată de capete prin două fire inextensibile și fără greutate, de lungime  $l$  (fig. 3.14). Bara orizontală  $AB$  poate



oscila în jurul unei axe fixe, verticale  $OZ$ , ce trece prin mijlocul ei.

Bara orizontală  $AB$ , de lungime  $l'$ , are greutatea  $\vec{G}$ , ce se descompune în două componente egale cu  $\frac{\vec{G}}{2}$  și care acționează la capetele celor două fire de suspensie. Când pendulul este deviat cu un unghi mic  $\theta$  și adus din poziția  $AB$  în poziția  $A'B'$ , forța  $\frac{\vec{G}}{2}$ , aplicată în  $A'$ , se descompune în două componente:  $\vec{N}$ , în direcția firului de suspensie  $A'P$ , și alta  $\vec{F}$ , perpendiculară pe  $\frac{\vec{G}}{2}$ , ambele situate în planul triunghiului  $PA'M$  (fig. 3.14, c). Forța  $\vec{N}$  este anulată de reacțiunea firului.

Din examinarea figurilor 3.14, b și 3.14, c, obținem

$$MA' = l \sin \gamma = l' \sin \frac{\theta}{2} \text{ sau } \sin \gamma = -\frac{l'}{l} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Cum pentru oscilații mici putem scrie  $\sin \gamma \simeq \gamma$ , vom avea

$$\gamma = \frac{l'}{l} \sin \frac{\theta}{2}.$$

De asemenea, din

$$F = \frac{G}{2} \operatorname{tg} \gamma,$$

pentru oscilații mici,  $\operatorname{tg} \gamma \simeq \gamma$ , din care rezultă

$$F = \frac{G}{2} \gamma = \frac{mg}{2} \frac{l'}{l} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (3.16)$$

Momentul care acționează asupra barei fiind un vector, avem

$$\vec{M} = \vec{l}' \times \vec{F}$$

sau

$$M = l' F \sin \frac{\pi - \theta}{2} = l' F \cos \frac{\theta}{2}$$

și, ținând seama de (3.16), se obține

$$M = \frac{mg l'^2}{2l} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{mg l'^2}{4l} \sin \theta.$$

Și întrucât pentru oscilații de amplitudine mică,  $\sin \theta \simeq \theta$  putem scrie

$$M = \frac{mg l'^2}{4l} \cdot \theta.$$

Aplicând legea a doua a mecanicii pentru corpurile în mișcare de rotație și introducând expresia momentului de inerție al unei bare în raport cu axa de rotație, obținem

$$M = I \varepsilon = \frac{m l'^2}{12} \cdot \varepsilon,$$

$\varepsilon$  fiind accelerația unghiulară a barei.

Egalind aceste două expresii ale lui  $M$ , rezultă

$$\frac{m l'^2}{12} \cdot \varepsilon = -\frac{mg l'^2}{4l} \theta \text{ sau } \varepsilon = -\frac{3g}{l} \theta, \quad (3.17)$$

din care putem obține relația dintre accelerația  $a$  și elongația  $x$ , pentru orice punct al barei, înmulțind ambii membri cu distanța  $r$  de la un punct al barei la axa  $OZ$ . Într-adevăr, avem

$$r \varepsilon = -\frac{3g}{l} r \theta \text{ sau } a = -\frac{3g}{l} x,$$

ceea ce dovedește că toate punctele barei execută oscilații armonice a căror perioadă este, conform (3.7) și (3.11),

$$k = \frac{3g}{l} \text{ și } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}},$$

expresie valabilă pentru oscilațiile mici ale pendulului bifilar.

### 3.2.6. Perioada de oscilație a unor sisteme simple

Aplicând aceeași metodă, se vor putea determina cu ușurință și perioadele altor sisteme ce pot oscila armonic.

*Pendulul matematic* este compus dintr-un corp asimilat cu un punct material greu, ce poate oscila la capătul unui fir de lungime  $l$ , inextensibil și fără greutate (fig. 3.15).

Pentru oscilații de amplitudine mică, făcând aproximația  $F \simeq -G\alpha$ , se găsește că

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

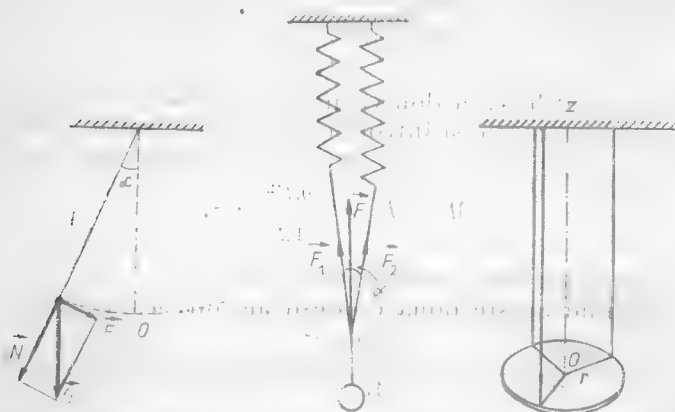


Fig. 3.15. Fig. 3.16. Fig. 3.17.

Pendulul elastic format din două resorturi așezate în paralel (fig. 3.16). Dacă se notează cu  $k_1$  și  $k_2$  constantele celor două resorturi și cu  $m$  masa corpului, pentru perioadă se obține expresia

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Pentru demonstrarea relației de mai sus, se consideră mărimea unghiului  $\alpha$  neglijabilă, încît forța

$$\vec{F} \simeq \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  fiind forțele cu care cele două resorturi acționează asupra corpului de masă  $m$ .

Pendulul trifilar (fig. 3.17). Este compus dintr-un disc cu raza  $r$ , cu moment de inerție  $I$ , masă  $m$ , suspendat prin trei fire verticale de lungime  $l$ . Întreg sistemul poate oscila

în jurul unei axe verticale ce trece prin centrul discului. Raționînd la fel ca în cazul pendulului bifilar, se obține

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Il}{mgr^2}}.$$

Dacă discul este cilindric, introducînd valoarea momentului de inerție,

$$I = \frac{mr^2}{2}.$$

relația se reduce la

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

### 3.2.7. Rezonatorul Helmholtz

Rezonatorul Helmholtz are o formă aproape sferică, gol în interior și cu două deschideri diametral opuse (fig. 3.18). În funcție de dimensiunile sale, acest tip de rezonator este capabil să intre în rezonanță cu un sunet de o anumită frecvență.

Modelul oscilatorului armonic, folosit în exemplele precedente, permite să se calculeze perioada oscilațiilor proprii a aerului în rezonatorul Helmholtz. Se presupune cunoscută suprafața  $S$  a secțiunii gîtului rezonatorului,  $l$  — lungimea lui,  $V$  — volumul cavității sferice și  $c$  — viteza sunetului în aer. Din cauza frecvenței mari, datorită com-

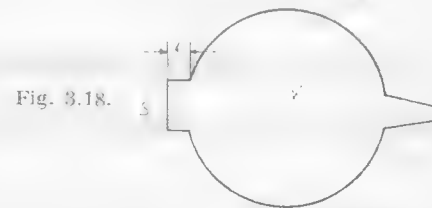


Fig. 3.18.

primărilor și destinderilor aerului din rezonator, variațiile de temperatură nu vor avea timp să se egaleze prin conductibilitate termică în perioada unei oscilații. Aproximînd aerul cu un gaz perfect, aceste variații se vor produce adiabatic, conform relației lui Poisson,

$$pV^\gamma = \text{const},$$

unde  $p$  este presiunea constantă a aerului din interiorul rezonatorului (egală cu cea atmosferică),  $V$  — volumul, iar  $\gamma$  — raportul dintre căldura masică la presiune constantă și căldura masică la volum constant.

Pentru variații mici de presiune  $\Delta p$  și de volum  $\Delta V$  în unda sonoră, putem scrie

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V)^\gamma = pV^\gamma$$

sau

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{-\gamma}.$$

Dezvoltând membrul al doilea după formula binomului lui Newton, obținem

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = 1 - \gamma \frac{\Delta V}{V} + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2} \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2.$$

Neglijând termenii de ordin superior, în continuare rezultă

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\Delta V}{V}.$$

Mărimea variațiilor presiunii la trecerea unei sonore se numește presiune sonoră sau suplimentară. Considerând întreaga masă de aer din gîtul rezonatorului ca un piston ce oscilează și acționează asupra aerului din interiorul său, obținem

$$\Delta p = -\gamma p \frac{S}{V} \Delta x,$$

în care  $\Delta x$  este elongația particulelor din gîtul rezonatorului.

Forța elastică variabilă ce acționează asupra întregii suprafețe  $S$  va fi

$$F = S\Delta p \text{ sau } F = -\gamma p \frac{S^2}{V} \Delta x,$$

de unde, notînd cu  $m$  și  $\rho$  masa și, respectiv, densitatea aerului din gîtul rezonatorului și cu  $a$  accelerația, se obține

$$F = ma = Sl\rho a = -\gamma p \frac{S^2}{V} x$$

(am înlocuit elongația  $\Delta x$  cu  $x$ ), încît

$$a = -\frac{\gamma p}{V\rho} \frac{S}{l} x.$$

Pe de altă parte, se știe că viteza sunetului în aer este

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \text{ sau } \gamma = \frac{c^2 \rho}{p}.$$

de unde

$$a = -\frac{c^2 S}{Vl} x$$

și, conform cu (3.7) și cu (3.11), perioada oscilațiilor proprii ale rezonatorului (care intră în rezonanță cu un sunet avînd aceeași perioadă) este

$$T = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{Vl}{S}}$$

Frecvența de rezonanță a rezonatoarelor depinde așadar de dimensiunile acestora.

### 3.2.8. Circuitul oscilant

Vom considera un circuit oscilant, compus dintr-un condensator  $C$ , o bobină cu inductanță  $L$  și de rezistență

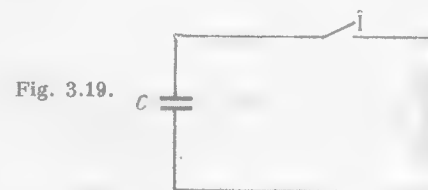


Fig. 3.19.

neglijabilă și un întrerupător  $I$  (fig. 3.19). După încărcarea condensatorului, la descărcarea sa, în circuit ia naștere un curent electric. La rîndul său, curentul electric variabil dă naștere unui cîmp magnetic variabil. Rezultă că energia cîmpului electrostatic, mai precis energia dielectricului condensatorului,  $W_e = \frac{1}{2} CU^2$ , în timpul descărcării con-

condensatorului suferă o variație echivalentă de creștere a energiei bobinei cu inductanța  $L$ , sub formă de energie a cîmpului magnetic  $W_m = \frac{1}{2} L I^2$ , astfel încît întotdeauna

va exista relația:  $-dW_e = dW_m$ . Ca urmare a variației energiilor în cele două sisteme fizice, condensatorul și bobina, în circuitul respectiv va lua naștere un curent electric alternativ.

Pentru a descrie matematic acest fenomen se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff, considerînd că în fiecare moment suma tensiunilor la bornele condensatorului și ale bobinei este egală cu zero,

$$u_e + u_L = 0.$$

în care

$$u_e = \frac{Q}{C} \quad \text{și} \quad u_L = L \frac{di}{dt},$$

deci

$$\frac{Q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0;$$

derivînd în raport cu timpul, obținem

$$\frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{1}{LC} i.$$

Ultima ecuație diferențială este analogă cu (3.6) și (3.7):

$$a \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

ceea ce arată că în circuit a luat naștere un curent sinusoidal. În conformitate cu (3.7) și (3.11),

$$k = \frac{1}{LC}, \quad \text{iar} \quad T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Ultima relație se numește formula lui Thomson și ne dă expresia perioadei de oscilație a curentului oscilant.

★

Se mai pot găsi multe alte exemple care să satisfacă modelul simplu al oscilatorului armonic, arătat la înce-

putul acestei secțiuni. Ne dăm ușor seama că modelul ales este limitat; el nu poate da indicații pentru cazurile în care forțele de frecare nu pot fi neglijate, cînd oscilațiile devin amortizate și nici în cazul oscilațiilor întreținute. În aceste cazuri trebuie construite alte modele, care să acopere domenii mai largi. Vom descrie în paragrafele următoare cîteva astfel de modele. Aceste modele au calitatea de a fi suficient de intuitive și folositoare din punct de vedere metodic, ceea ce face ca modelele mecanice să poată fi întrebuițate, prin analogie, pentru înțelegerea curentului electric, a curenților ce se produc în circuitele oscilante, a rezonanței etc. La rîndul lor, unele sisteme mecanice vibratorii complexe pot fi studiate cu mai multă ușurință dacă sînt modelate prin circuite electrice. Folosirea modelelor electromecanice pentru înțelegerea altor capitole ale fizicii trebuie totuși făcută cu multă prudență și este întotdeauna necesar să se arate limitarea lor pentru a evita o alunecare spre mecanicism.

### 3.3. Analogii electromecanice

#### 3.3.1. Modele analogice, mecanice, folosite pentru înțelegerea fenomenelor privind curentul electric continuu

Multe dintre temele care trebuie însușite de către cei care studiază fizica sînt destul de aride, greu de înțeles. Pentru înțelegerea lor, un bun profesor de fizică face anumite legături cu alte capitole studiate mai înainte, realizează o serie de analogii care îl ajută în predare. Așa, de exemplu, analogia care se face între mișcarea de translație și cea de rotație în jurul unei axe a solidului rigid facilitează mult predarea mișcării de rotație.

În cele ce urmează vom descrie unele modele prin analogie, plecînd de la ideea că stăpînirea unei rezerve de analogii de către fiecare profesor este un tezaur care numai prin experiență poate fi obținut și dezvoltat.

a. **Analogia dintre circuitul electric și modelul său gravitațional.** Deși tinerii posedă unele cunoștințe de electricitate din școala generală, este uneori dificil să-i facem să înțeleagă mecanismul transportului de purtători de sarcini, într-un circuit electric. Pentru facilitarea înțe-



legerii acestei probleme, se poate apela la analogia dintre un circuit electric simplu și modelul său gravitațional.

În acest sens, fie un circuit electric simplu, compus din sursa electrică  $E$ , cu rezistența internă  $r$ , și rezistorul  $R$  (fig. 3.20). Sensul curentului electric coincide cu sensul de

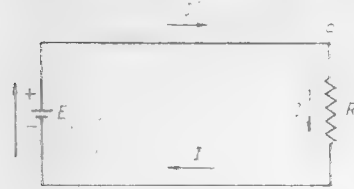


Fig. 3.20.



Fig. 3.21.

mișcare a purtătorilor de sarcină pozitivă, în cazul nostru sensul acelor de ceasornic, se pune problema menținerii unei intensități de curent electric constante, fapt ce este asigurat de sursa de energie  $E$ . Variația energiei sursei, în timpul transferului de sarcini, determină un lucru mecanic. Conform principiului întâi al termodinamicii, dacă conductorul din care este confecționat rezistorul  $R$  este izolat ( $Q = 0$ ), lucrul mecanic respectiv contribuie integral la creșterea corespunzătoare a energiei interne, deci la încălzirea conductorului. În caz contrar, o parte a lucrului mecanic determină creșterea energiei interne, într-o măsură mai mare sau mai mică, iar altă parte se regăsește în căldura transferată spre exterior.

În figura 3.21 este desenat analogul gravitațional al circuitului electric, prezentat mai sus. Locul sursei electrice este luat de om, care, prin ridicarea bilelor, efectuează asupra acestora un lucru mecanic, trimițându-le printr-un jgheab, într-un vas cilindric, în care se află un lichid viscos. Din acest vas, bilele ajung din nou la om. Mișcarea bilelor este uniformă atât pe cele două jgheaburi, de sus și de jos, cât și în vasul cilindric, dacă omul ridică și dă drumul la bile în mod ritmic, depunând de fiecare dată același efort.

Creșterea temperaturii lichidului viscos are loc în urma creșterii energiei sale interne, ca urmare a lucrului mecanic efectuat de bile, iar lucrul mecanic rezultă în urma scăderii energiei cimpului gravitațional.

**b. Definiția curentului electric.** Curentul electric se definește ca transportul de electroni liberi (purtători de

sarcină) printr-un fir conductor, stabilirea curentului prin fir realizându-se instantaneu. Faptul că viteza de antrenare a electronilor este mai mică decât  $1 \text{ mm/s}$ , contrazice definiția de mai sus și, în realitate, curentul electric nu este o simplă translație de electroni, mecanismul său fiind ceva mai complicat.

Pentru a scoate în evidență acest mecanism, se poate imagina următoarea experiență. Vom considera un tub plin cu apă, care are un capăt închis și prevăzut cu un indicator de presiune, iar la celălalt capăt este adaptată o pompă. Tubul fiind plin cu apă, introducând cu ajutorul pompei o cantitatea suplimentară de apă, se produce un excedent de presiune care se transmite de-a lungul tubului, până la capătul opus. Viteza de propagare a undei este independentă de translația moleculelor lichidului și deci, în acest caz, nu moleculele de apă se deplasează, ci unda de presiune.

În mod asemănător, în cazul curentului electric nu electronii se deplasează, ci unda electromagnetică. Cînd printr-un conductor metalic trece un curent electric, toți electronii liberi din conductor intră într-o anumită stare de vibrație, care se propagă prin conductor cu viteza luminii.

**c. Analogia dintre circuitul hidrodinamic și cel electric.** Să considerăm un sistem de tuburi din sticlă, în care se găsește apă, capătul  $B$  fiind închis (fig. 3.22 a). Se constată că nivelele coloanelor de apă din tuburile piezometrice sînt aceleași (principiul vaselor comunicante), fapt ce arată că lichidul din conducta  $AB$  apasă asupra peretelui

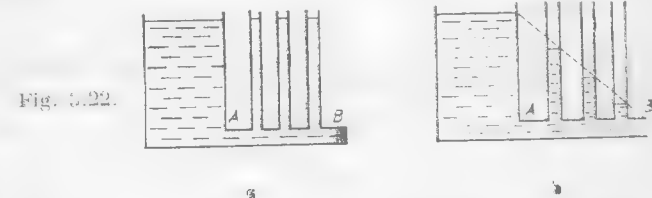


Fig. 3.22.

cu aceeași presiune pe toată lungimea conductei, presiune măsurată de înălțimea coloanelor de lichid.

Dacă se deschide capătul  $B$ , lichidul începe să curgă, iar nivelul acestuia în tuburi scade, pe măsură ce ne apropiem de punctul  $B$ , unde nivelul este zero (experiența lui

Bernoulli). Mai mult, se constată că aceste nivele se află pe o linie dreaptă, ceea ce arată că presiunea scade uniform până la zero, de-a lungul coloanei  $AB$  (fig. 3.22, b).

Fie  $q$  debitul conductei  $AB$ , unde  $q = \frac{V}{t}$ , adică volumul lichidului care se scurge prin conductă, raportat la timp. Considerind un lichid incompresibil, avind viscozitatea dinamică  $\eta$  și o conductă de lungime  $l$  și cu raza  $r$ , suficient de mică, încît curgerea să fie laminară, se poate aplica legea lui Poiseuille,

$$q = K_1 \frac{(p_A - p_B)r^4}{l\eta},$$

care arată, că debitul este proporțional cu diferența de presiune ce produce curgerea și cu puterea a patra a razei conductei și este invers proporțional cu lungimea conductei și cu coeficientul de viscozitate al lichidului.

Dacă se au în vedere două puncte oarecare de pe conductă, cărora le corespund înălțimile coloanelor  $H$  și  $h$  ale lichidului, în tuburile piezometrice,

$$p_A - p_B = \rho g(H - h),$$

deci

$$q = \frac{Kr^4}{\eta} \frac{H - h}{l}, \quad (3.18)$$

deunde

$$h = H - \frac{ql\eta}{Kr^4},$$

ceea ce arată că atunci cînd  $q = \text{const}$ , presiunea lichidului scade o dată cu creșterea lui  $l$ .

Punînd relația (3.18) sub forma

$$q = \frac{H - h}{\frac{l}{Kr^4}}$$

și notînd

$$R = \eta \frac{l}{Kr^4}, \quad (3.19)$$

numită rezistența hidrodinamică, se obține

$$q = \frac{H - h}{R}, \quad (3.20)$$

ceea ce arată că debitul este proporțional cu diferența de presiune dintre capetele conductei și invers proporțional cu rezistența hidrodinamică  $R$ . Dacă se are în vedere re-

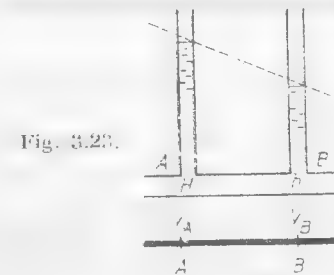


Fig. 3.23.

lația de definiție a presiunii,  $p = F/S$ , se constată că debitul depinde de forța pe unitate de suprafață cu care este împins lichidul și de rezistența de frecare a lichidului.

Să transpunem rezultatele din hidrodinamică la transportul electronilor printr-un conductor electric.

Să observăm în primul rînd că diferenței de presiune,  $H - h$ , responsabilă de curgerea lichidului, îi corespunde diferența de potențial  $V_A - V_B$  (fig. 3.23), datorită căreia are loc transportul de electroni. În timpul curgerii lichidului, presiunea se micșorează continuu; în mod asemănător, potențialul electric scade de-a lungul circuitului, de la polul pozitiv al sursei electrice pînă la polul negativ, trecînd prin circuitul exterior. Atît diferența de presiune hidrodinamică, cît și diferența de potențial electric sînt cu atît mai mari, cu cît cele două perechi de puncte considerate sînt mai depărtate între ele.

Debitului de lichid  $q = V/t$ , egal deci cu raportul dintre volumul de lichid ce trece prin secțiunea conductei și timpul  $t$ , îi corespunde intensitatea curentului electric  $I = Q/t$ , mărimile  $q$  și  $I$  rămînînd constante, prima de-a lungul conductei considerate, iar a doua, pe întreg circuitul.

Dacă se are în vedere relația (3.20) pentru debitul de lichid, o relație asemănătoare se poate scrie și pentru

intensitatea curentului electric,

$$I = \frac{V_A - V_B}{R}, \quad (3.21)$$

ceea ce arată că rezistenței hidrodinamice îi corespunde rezistența electrică în circuitul electric. Relațiile (3.20) și (3.21) reprezintă legea lui Ohm, prima pentru hidrodinamică și a doua pentru electrocinetică.

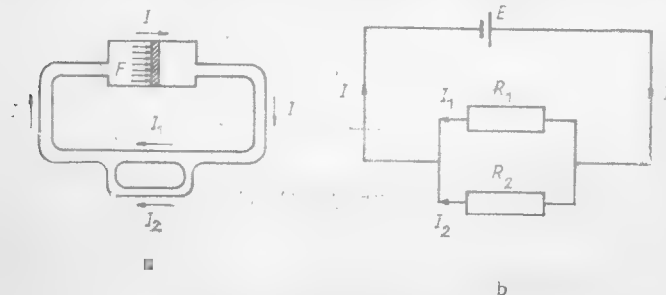


Fig. 3.24.

La fel ca și rezistența hidrodinamică, se constată că și rezistența electrică, pentru circuite filiforme, este proporțională cu lungimea conductorului. Variația rezistenței cu secțiunea este ceva mai complicată în hidrodinamică decât în electrocinetică.

Toate cele spuse mai sus reies și mai bine din analiza comparativă a celor două circuite din figura 3.24: circuitul hidrodinamic (a) și circuitul electric (b). Dacă  $W$  este energia sau lucrul mecanic efectuat la deplasarea pistonului pe distanța  $l$ , atunci

$$W = Fl = pS,$$

unde  $p = F/S$  este presiunea exercitată pe pistonul de secțiune  $S$ . Deoarece  $Sl$  este volumul de lichid deplasat în timpul  $t$ , rezultă

$$Sl = V = q t,$$

unde  $q$  este debitul de lichid. Rezultă imediat  $W = p q t$  sau

$$W = (H - h) q t.$$

În mod analog, energia transferată de electroni între cele două puncte ale circuitului va fi

$$W = (V_A - V_B) I t = U I t.$$

Revenind la hidrodinamică, credem că este interesant de amintit că primul care a intuit posibilitatea și a construit

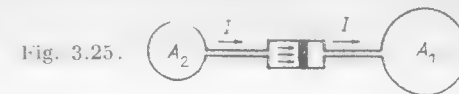


Fig. 3.25.

dispozitivele necesare pentru transmiterea energiei mecanice prin medii lichide a fost savantul român G. Constantinescu, întemeind ramura fizicii intitulată sonicitate. G. Constantinescu a descoperit analogia formală dintre electronică și sonicitate, ajungând să transpună o mare varietate a dispozitivelor din electrotehnică în sonicitate. Însuși G. Constantinescu afirma că „analogiile sînt atît de mari din punct de vedere teoretic, încît unui inginer care ar citi o carte de sonicitate i s-ar părea că citește o carte de electricitate”.

**d. Analogia mecanică a unui condensator.** Să observăm din nou circuitul hidrodinamic din figura 3.24, a, analog circuitului electric din figura 3.24, b. Cele două capete ale corpului de pompă nu vor mai fi unite între ele printr-o conductă, ci vor fi legate la două rezervoare  $A_1$  și  $A_2$  (fig. 3.25).

În întreg sistemul se află un fluid compresibil, în echilibru, la presiunea  $p_0$ . Acționînd asupra pistonului cu forța  $F$ , un volum de fluid  $V$  este scos din compartimentul  $A_2$  și introdus în  $A_1$ . În acest fel, presiunea crește în  $A_1$  și devine

$$p_1 = p_0 + C_1 V,$$

iar în  $A_2$  scade,

$$p_2 = p_0 - C_2 V.$$

Între cele două rezervoare se stabilește diferența de presiune

$$p = p_1 - p_2 = (C_1 + C_2) V = C V,$$

unde  $C_1$ ,  $C_2$  și  $C$  sînt constante ce depind de compresibilitatea fluidului și de volumul rezervoarelor. Dacă  $S$  este suprafața pistonului, echilibrul se stabilește atunci cînd

$F/S = p$ . În cazul în care echilibrul este stabilit, nu mai există diferență de presiune, iar curgerea fluidului încetează.

Acest dispozitiv reprezintă analogul mecanic al condensatorului și anume: rezervoarele  $A_1$  și  $A_2$  sînt analoge armăturilor condensatorului, volumul de fluid  $V$  este analog cu sarcina electrică  $Q$ , diferența de presiune este analogă cu diferența de potențial, iar constanta  $C$  este analogă capacității condensatorului. Aceste concluzii permit scrierea unei relații valabile pentru condensatori și anume

$$U = CQ,$$

$U$  fiind tensiunea sau diferența de potențial dintre plăcile condensatorului.

Dăm mai jos, în sinteză, unele elemente și mărimi analoge ale circuitului hidrodinamic și celui electric.

Circuit hidrodinamic	Circuit electric
Pompă	Sursa de tensiune
Conductă	Conductor electric
Rezervor de lichid	Armătură a condensatorului
Diferența de presiune, $H - h$	Diferența de potențial, $V_A - V_B$
Volumul fluidului, $V$	Sarcina electrică, $Q$
Rezistența hidrodinamică, $R$	Rezistența electrică, $R$
Debitul volumic de lichid	Intensitatea curentului electric
$q = V/t$	$I = Q/t$
Legea lui Ohm $q = \frac{H - h}{R}$	Legea lui Ohm $I = \frac{V_A - V_B}{R}$

### 3.3.2. Analogii rezultate din studiul circuitelor electrice de curent continuu și al celor de curent alternativ

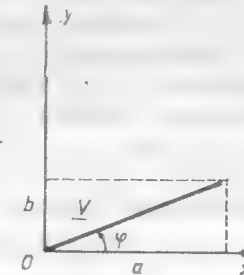
a. **Introducere în metoda de reprezentare complexă a mărimilor sinusoidale.** Vom relua funcția sinusoidală de timp (3.5) scrisă sub forma

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Această funcție trece, prin aceleași valori și în același sens în intervale de timp egale cu perioada  $T$ . Expresia

de mai sus definește o mișcare oscilatorie armonică. Constanta  $V_m$  se numește amplitudine, ea fiind egală cu valoarea maximă pe care o poate avea funcția  $v$ . Mărimea

Fig. 3.26.



$\alpha = \omega t + \varphi$  se numește fază, iar  $\varphi$  fază inițială. Sînt cunoscute relațiile următoare dintre pulsația  $\omega$ , perioada  $T$  și frecvența  $\nu$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

În dezvoltările următoare vom folosi metoda simbolică de reprezentare în planul complex a mărimilor sinusoidale. Prin aceasta calculul cu funcții sinusoidale care au aceeași frecvență, deci aceeași pulsație, poate fi mult simplificat.

Pentru a înțelege în ce constă această metodă, vom lua un vector  $\underline{V}$  de modul  $V_m$  care face unghiul  $\varphi$  cu axa  $Ox$  din planul complex (fig. 3.26). Proiecțiile lui pe cele două axe ale acestui plan sînt

$$a = V_m \cos \varphi, \quad b = i V_m \sin \varphi.$$

Expresia

$$\underline{V} = V_m(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (3.22)$$

se numește reprezentarea trigonometrică a fazorului  $\underline{V}$ . Vom folosi convenția ca vectorii care se exprimă prin numere complexe să fie notați cu o bară dedesubt.

Prin reprezentarea unei mărimi complexe  $\underline{V}$  printr-un vector în planul complex, fiecărei mărimi sinusoidale i se asociază deci cîte un vector (liber) în acest plan.

Din relațiile precedente rezultă

$$V_m = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ și } \varphi = \arctg \frac{b}{a}, \quad (3.23)$$



cu condiția ca atunci cînd se stabilește valoarea lui  $\varphi$ , se ia în considerație și cadranul trigonometric în care se găsește fazorul  $\underline{V}$ .

Deoarece în operațiile care se fac cu funcțiile sinusoidale, pulsația  $\omega$  are permanent aceeași valoare constantă, o astfel de funcție sinusoidală este definită, dacă se cunosc două dintre mărimile  $a$ ,  $b$  și unghiul  $\varphi$ .

În conformitate cu relațiile lui Euler,

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \text{ și } \cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi}, \quad (3.24)$$

putem exprima fazorul (3.22) prin relația exponențială

$$\underline{V} = V_m e^{i\varphi},$$

care poartă numele de reprezentare simplificată complexă a fazorului  $\underline{V}$ .

În această expresie, mărimea  $e^{i\varphi}$  arată că fazorul  $\underline{V}$  este rotit în sensul trigonometric cu unghiul  $\varphi$ .

*Exemplu.* O mărime sinusoidală, exprimată prin

$$v = 4 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

este reprezentată complex prin fazorul

$$\underline{V} = 4 e^{i30^\circ} = 4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 2\sqrt{3} + i2.$$

Invers, expresiei reprezentate complex prin

$$\underline{V} = -2 + i4$$

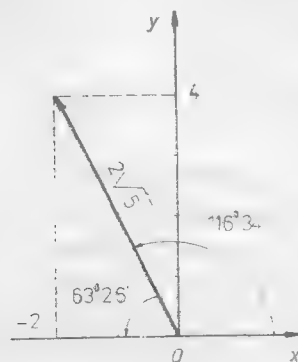


Fig. 3.27.

(fig. 3.27) îi corespunde funcția sinusoidală a cărei amplitudine sau modulul fazorului este

$$V_m = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5},$$

iar unghiul făcut de fazor cu axa  $Ox$  se obține din relația

$$\text{are } \operatorname{tg} \frac{4}{2} = 63^\circ 26'.$$

Ținînd însă seama că fazorul se găsește în cadranul II, unghiul calculat trigonometric este

$$\varphi = 180^\circ - 63^\circ 26' = 116^\circ 34',$$

de unde

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= -2 + i4 = 2\sqrt{5} (\cos 116^\circ 34' + i \sin 116^\circ 34') \\ &= 2\sqrt{5} e^{i116^\circ 34'} \end{aligned}$$

$$v = 2\sqrt{5} \sin(\omega t + 116^\circ 34').$$

**b. Operații algebrice cu fazoni.** *Adunarea fazorilor (exemplu).* Se dau mărimile sinusoidale:

$$v_1 = 2 \sin(\omega t + 75^\circ) \text{ și } v_2 = 6 \sin(\omega t + 25^\circ),$$

ele fiind reprezentate trigonometric prin fazonii

$$\underline{V}_1 = 2 (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) \text{ și } \underline{V}_2 = 6 (\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ).$$

Suma acestor fazoni va fi egală cu fazorul

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = 2(0,26 + i0,97) + 6(0,91 + i0,42) = \\ &= 0,52 + 5,46 + i(1,94 + 2,52) \end{aligned}$$

sau

$$\underline{V} = 5,98 + i4,46.$$

Acest fazor va reprezenta o funcție sinusoidală cu amplitudinea

$$\sqrt{5,98^2 + 4,46^2} = 7,46$$

și faza inițială

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4,46}{5,98} = 36^\circ 43',$$

deci va corespunde funcției sinusoidale

$$v = 7,46 \sin(\omega t + 36^\circ 43'),$$

reprezentată prin fazorul

$$\underline{V} = 7,46 e^{i36^\circ 43'}.$$

Această operație este reprezentată grafic, complex în figura 3.28.

Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere a fazorilor (exemplu). Se dau fazorii

$$\underline{V}_1 = 3 e^{i20^\circ} \quad \underline{V}_2 = 5 e^{i45^\circ}$$

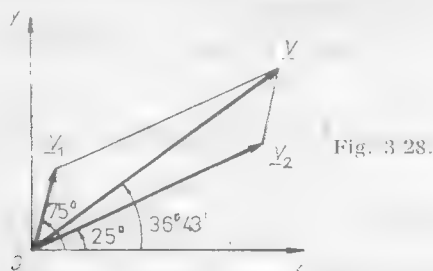


Fig. 3.28.

Produsul lor va fi fazorul

$$\underline{V} = \underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2 = 3 e^{i20^\circ} \cdot 5 e^{i45^\circ} = 15 e^{i(20+45)} = 15 e^{i65^\circ}$$

care are următoarea reprezentare trigonometrică:

$$\underline{V} = 15 (\cos 65^\circ + i \sin 65^\circ)$$

și corespunde funcției sinusoidale

$$v = 15 \sin(\omega t + 65^\circ).$$

În mod analog se procedează la împărțirea fazorilor.

$$\text{Fie } \underline{V}_1 = 4 e^{i20^\circ} \text{ și } \underline{V}_2 = 8 e^{i60^\circ},$$

de unde

$$\underline{V} = \frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_2} = \frac{4 e^{i20^\circ}}{8 e^{i60^\circ}} = 0,5 e^{-i40^\circ} = 0,5 (\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ),$$

sau

$$v = 0,5 \sin(\omega t - 40^\circ).$$

Pentru ridicarea la putere a unui fazor, fie

$$\underline{V}_1 = 2 e^{i20^\circ}.$$

Ridicat la puterea a treia, de exemplu, se obține

$$\underline{V} = \underline{V}_1^3 = (2 e^{i20^\circ})^3 = 8 e^{i60^\circ} = 8 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

și

$$v = 8 \sin(\omega t + 60^\circ).$$

**Derivarea fazorilor.** Fie funcția sinusoidală reprezentată prin fazorul  $v = V_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{V}$ . Aplicând funcției  $v$  regulile obișnuite de derivare, se obține

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \omega V_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega V_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega V_m e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \omega V_m e^{i\varphi} e^{i\frac{\pi}{2}} = \\ &= \omega V_m \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) e^{i\varphi} = i \omega \underline{V}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Rezultă că derivării în raport cu timpul a unei mărimi sinusoidale îi corespunde, în domeniul reprezentărilor complexe, înmulțirea cu  $i\omega$ . Deci în planul complex, derivării îi corespunde o rotire a fazorului cu  $\frac{\pi}{2}$ , în sens pozitiv, și mărirea lui de  $\omega$  ori (fig. 3.29).

Se demonstrează în același mod, că derivatei de ordinul  $n$  a funcției sinusoidale îi corespunde expresia

$$\frac{d^n v}{dt^n} \Rightarrow (i\omega)^n \underline{V}. \quad (3.26)$$

**Integrarea fazorilor.** Fie aceeași funcție sinusoidală, reprezentată prin fazorul

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{V},$$

căreia ne propunem să-i calculăm integrala. Avem

$$\begin{aligned} \int \underline{V} dt &\Rightarrow \int v dt = \int V_m \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{V_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{V_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{V_m}{\omega} e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} = \\ &= \frac{V_m}{\omega} e^{i\varphi} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{V_m}{\omega} \left( \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right) e^{i\varphi} = \\ &= -\frac{V_m}{\omega} i e^{i\varphi} = \frac{1}{i\omega} V_m e^{i\varphi} = \frac{1}{i\omega} \underline{V} = -\frac{i}{\omega} \underline{V}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Rezultă că integrării unui fazor îi corespunde în domeniul complex împărțirea fazorului cu  $\omega$  și rotirea sa în sens negativ cu  $\frac{\pi}{2}$  (fig. 3.30).

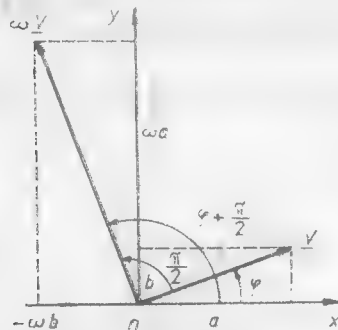


Fig. 3.29.

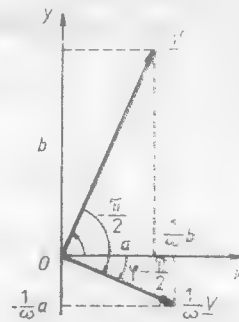


Fig. 3.30.

c. Folosirea metodei simbolice pentru calcularea mărimilor caracteristice circuitelor electrice de curent alternativ. În aplicații prezintă un interes deosebit circuitele formate exclusiv din rezistoare, bobine (care pot sau nu fi cuplate magnetic), condensatoare și surse de tensiune. Pentru simplificare, circuitele de care ne vom ocupa în cele ce urmează nu vor conține bobine cuplate magnetic. Tensiunile și curenții care apar în aceste circuite vor fi sinusoidale, de forma:  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$  sau  $e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \varphi)$  și  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ . În aceste expresii  $u$ ,  $e$ ,  $i$  sînt valorile instantanee, adică valorile tensiunii sau tensiunii electromotoare și intensității curenților pentru o anumită valoare  $t$  a timpului;  $U_m$ ,  $\mathcal{E}_m$  și  $I_m$  sînt la rîndul lor valorile maxime sau amplitudinile acestor mărimi. În electrotehnică se folosesc mărimile reprezentate prin simbolurile  $U$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $I$  care se numesc tensiuni, tensiuni electromotoare și, respectiv, intensități efective sau eficace. Pătratele acestor mărimi sînt egale respectiv cu media pătratelor tensiunii, tensiunii electromotoare sau intensității în timpul unei perioade. Din calcule rezultă

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}, I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Cu ajutorul ampermetrului și voltmetrului construite pentru curenți alternativi se măsoară tocmai aceste mărimi.

În circuitele descrise în continuare, frecvența, deci și pulsația  $\omega$ , va avea întotdeauna aceeași valoare constantă.

Fie un circuit (fig. 3.31) compus dintr-o bobină de inductanță  $L$ , un rezistor de rezistență  $R$  și un condensator

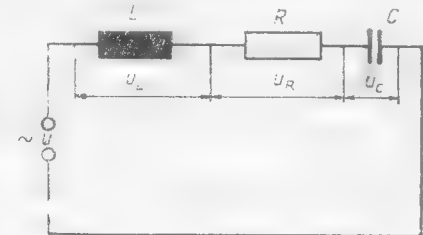


Fig. 3.31.

de capacitate  $C$ , montați în serie și alimentați la o sursă cu tensiunea alternativă,  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Conform legii a doua a lui Kirchhoff,

$$u = \sum_i u_i = u_L + u_R + u_C \Rightarrow \underline{U}. \quad (3.28)$$

Se știe însă că

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ și } u_R = Ri,$$

de asemenea,

$$Q = Cu_C; \frac{dQ}{dt} = i, du_C = \frac{1}{C} dQ; u_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Introducînd aceste valori în expresia (3.28), obținem ecuația integro-diferențială

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u. \quad (3.29)$$

Ținînd seama de relațiile (3.25) și (3.27), se obține

$$iL\omega I + RI + \frac{I}{iC\omega} = \underline{U} \quad (3.30)$$

sau

$$\left[ R + i \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I = U$$

deci

$$U = Z I. \quad (3.31)$$

Am notat cu  $Z$  expresia

$$Z = R + i \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right), \quad (3.32)$$

care se numește impedanța electrică complexă. Mărimea

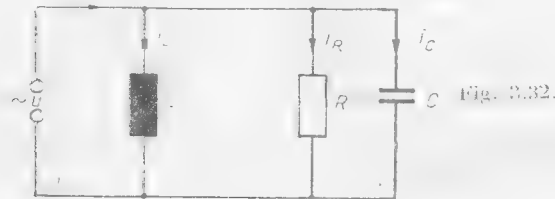
$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

se numește reactanță,  $L\omega$  fiind reactanța inductivă, iar  $\frac{1}{C\omega}$ , reactanța capacitivă.

Să considerăm din nou un circuit (fig. 3.32) compus din inductanța  $L$ , rezistorul  $R$  și capacitatea  $C$ , montate în paralel și alimentate la o sursă de tensiune alternativă  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ .

Ecuatia de echilibru a curenților pentru această schemă, obținută prin aplicarea legii întâi a lui Kirchhoff este

$$i_c + i_R + i_L = i \Rightarrow I. \quad (3.33)$$



Avem însă

$$Q = Cu \text{ sau } i_c = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du}{dt}, \text{ deci } i_c = C \frac{du}{dt},$$

$$i_R = \frac{u}{R},$$

iar

$$u = L \frac{di_L}{dt} \text{ sau } di_L = \frac{1}{L} u dt, \text{ deci } i_L = \frac{1}{L} \int u dt.$$

Introducând valorile lui  $i_c$ ,  $i_R$ ,  $i_L$  în relația (3.33), se obține ecuația integro-diferențială

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt = i. \quad (3.34)$$

Ținând seama de (3.25) și (3.27), obținem expresia ei complexă

$$iC\omega U + \frac{1}{R} U - \frac{i}{L\omega} U = I$$

sau

$$\left[ \frac{1}{R} + i \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right] U = I, \quad (3.35)$$

de unde

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} + i \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right), \quad (3.36)$$

deci

$$\underline{I} = \frac{U}{Z}. \quad (3.37)$$

Expresia

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

se numește admitanță complexă și este egală cu suma inversilor termenilor ce intră în relația impedanței complexe (3.32). În relația (3.36)  $\underline{Z}$  este impedanța complexă a sistemului din figura 3.32, compus dintr-o inductanță, un rezistor și o capacitate așezate în paralel, spre deosebire de valoarea lui  $Z$  exprimată în relația (3.32), care reprezintă impedanța aceluiași elemente dispuse însă în serie (fig. 3.31).

Prin urmare, în conformitate cu (3.31) și (3.37), căderile de tensiune rezistive, inductive și capacitive se re-

prezintă complex sub forma generală

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}. \quad (3.38)$$

Impedanța complexă poate avea în cazul cel mai simplu oricare dintre valorile

$$\underline{Z} = R, \underline{Z} = i\omega L \text{ și } \underline{Z} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}, \quad (3.39)$$

după cum circuitul este constituit respectiv numai dintr-o rezistență, inductanță sau capacitate. În general însă, în cazurile care prezintă importanță în aplicații, impedanța este egală cu suma a două sau mai multe impedanțe (complexe) simple.

Din relația (3.38), scrisă sub forma simbolică, rezultă că în circuitele de curent alternativ impedanța înlocuiește simpla rezistență ohmică care intervine în circuitele de curent continuu.

În concluzie, utilizând simbolurile complexe  $\underline{I}$ ,  $\underline{U}$ ,  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{Z}$  întreaga teorie a circuitelor și a rețelelor de circuite, bazată pe legile lui Ohm și Kirchhoff, stabilită pentru curenți staționari, se poate transcrie pentru curenții alternativi (cvasistaționari) — care corespund în mecanică, oscilațiilor forțate ale punctului material. De aceea, în problemele de curent alternativ se vor scrie

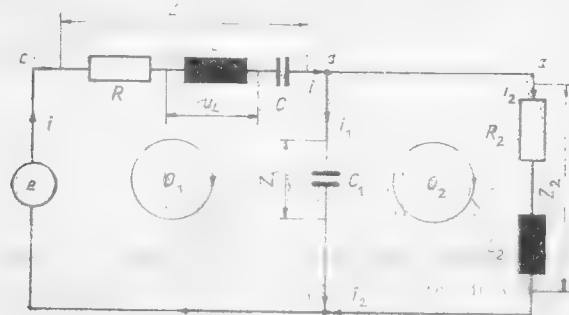


Fig. 3.33.

ecuațiile în formă complexă. Acestea se rezolvă apoi, după cum este cazul în raport cu complexe, necunoscute care pot fi  $\underline{I}$ ,  $\underline{U}$ ,  $\underline{\varepsilon}$ , sau  $\underline{Z}$ . În cele din urmă după ce s-au calculat aceste mărimi complexe, se pot determina valorile instantanee  $e$ ,  $u$  sau  $i$  ale curentului.

*Exemplu.* Se cunosc următorii parametri:  $R = 2\Omega$ ,  $L = 6 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ ,  $C = 10^{-3} \text{ F}$ ,  $C_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ F}$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,

$L_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ ,  $\varepsilon = 40 \text{ V}$ ,  $\omega = 2\pi 50 \text{ s}^{-1}$ , ai circuitelor reprezentate în figura 3.33. Să se determine valorile intensităților instantanee  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ , precum și tensiunea  $U_L$  la bornele inductanței  $L$ .

Vom nota cu  $\underline{Z}$  impedanța complexă din ramura (c a) a circuitului, cu  $\underline{Z}_1$  aceea a ramurei (a b) și cu  $\underline{Z}_2$  aceea a ramurei (a d b).

Se scrie pentru nodul (a) prima teoremă a lui Kirchhoff în formă complexă. Apoi se scrie, în continuare, tot în formă complexă, a doua teoremă a lui Kirchhoff, pentru ochiurile  $o_1$  și  $o_2$ , folosindu-se sensurile de parcurs indicate în figură. Se obține

$$\underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0,$$

$$\underline{Z} \underline{I} + \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = 0,$$

$$- \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = 0.$$

Rezolvând în raport cu  $\underline{I}$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  acest sistem de trei ecuații liniare, se obține

$$\underline{I} = \frac{\underline{\varepsilon} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{\varepsilon} \underline{Z}_2}{\underline{Z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{\varepsilon} \underline{Z}_1}{\underline{Z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}. \quad (3.40)$$

Impedanțele complexe sînt date de relațiile

$$\underline{Z} = R + i \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right), \quad \underline{Z}_1 = -\frac{i}{C_1\omega}, \quad \underline{Z}_2 = R_2 + iL_2\omega,$$

în care, introducînd datele problemei, se obține

$$\underline{Z} = 2 + i \left( 6 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50 - \frac{1}{10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50} \right) = 2 - i 1,298,$$

$$\underline{Z}_1 = -\frac{i}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50} = -i 0,637,$$

$$\underline{Z}_2 = 4 + i 4 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50 = 4 + i 1,257.$$



Substituindu-se aceste valori ale impedanțelor în relațiile (3.40), rezultă

$$\underline{I} = \frac{40(4 + i0,620)}{(2 - i1,298)(4 + i0,620) - i0,637(4 + i1,257)} =$$

$$= \frac{161,911 e^{i8,811}}{11,598 e^{-i34,085}} = 13,960 e^{i42^{\circ}54'},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{40(4 + i1,257)}{11,598 e^{-i34,085}} = \frac{167,714 e^{i17,445}}{11,598 e^{-i34,085}} = 14,460 e^{i51^{\circ}32'},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{40(-i0,637)}{11,598 e^{-i34,085}} = \frac{25,48 e^{-i90}}{11,598 e^{-i34,085}} = 2,197 e^{-i55^{\circ}55'}.$$

Tensiunea la bornele inductanței  $L$  se obține din relația

$$\underline{U}_L = \underline{I} Z_L$$

sau

$$\underline{U}_L = 13,960 e^{i42^{\circ}54'} \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 2\pi \cdot 50 e^{i90} = 26,314 e^{i132^{\circ}54'}$$

Tensiunea efectivă fiind

$$U_L = 26,314V,$$

iar cea instantanee,

$$u_L = \sqrt{2} \cdot 26,314 \sin(2\pi \cdot 50 t + 132^{\circ}54').$$

Intensitățile efective ale curenților în cele trei ramuri ale circuitelor fiind respectiv

$$\underline{I} = 13,960A, I_1 = 14,460A, I_2 = 2,197A,$$

iar valorile instantanee ale acestor intensități se obțin din relațiile

$$i = \sqrt{2} 13,960 \sin(2\pi 50t + 42^{\circ}54'),$$

$$i_1 = \sqrt{2} 14,460 \sin(2\pi 50t + 51^{\circ}32'),$$

$$i_2 = \sqrt{2} 2,197 \sin(2\pi 50t - 55^{\circ}55').$$

Pentru orice valoare a lui  $t$ , intensitățile instantanee trebuie să îndeplinească condiția

$$i - i_1 - i_2 = 0.$$

Iată o verificare pentru  $t$  egal cu zero sau număr întreg :

$$i_0 - i_{01} - i_{02} = \sqrt{2} (9,503 - 11,322 + 1,819) = 0.$$

## Capitolul 4. EXEMPLE DE MODELARE IDEALĂ

„Omul de știință nu trebuie să uite că ipoteza trebuie considerată numai ca mijloc, niciodată ca scop”.

T. HUXLEY

Folosirea metodei modelării în fizică se face respectând toate datele științifice, fiind absolut necesar să știm ce avem de modelat și până la ce limite de similitudine sau analogie se poate merge, pentru a asigura modelului semnificația fizică cât mai apropiată de original. În general, construcția unui model se bazează pe o așa-zisă „simplificare rațională”, adică din totalitatea de variabile sau de parametri, se aleg numai cei esențiali și care se includ în modelul generalizat. În același timp, trebuie precizate elementele ce se pun în corespondență, o dată cu neglijarea intenționată a anumitor amănunte nesemnificative.

O largă aplicare în domeniul fizicii a căpătat modelarea ideală, care se caracterizează printr-un mare grad de generalitate, în sensul că cu ajutorul ei pot fi descrise fenomene analoage, indiferent de forma de mișcare a materiei care se manifestă în ele. În același timp, modelarea ideală poate fi folosită cu mult succes pentru descrierea unui concept, a unei idei sau teorii, ori a unui sistem de concepte sau idei.

### 4.1. Modelele de gaze

Vom descrie mai întâi modelul gazului perfect, imaginat de James Clark Maxwell, pe baza căruia a fost elaborată teoria cinetică-moleculară a gazelor. Conform acestui model, un gaz este format din molecule. Aceste molecule sînt mici sfere perfect elastice, ale căror dimensiuni pot fi considerate neglijabile în raport cu distanțele dintre ele. Moleculele din interiorul gazului se găsesc într-o stare de mișcare dezordonată, nici o direcție de mișcare nefiind preferată față de alte direcții. Distanțele dintre molecule fiind

foarte mari în raport cu dimensiunile moleculelor, asupra moleculelor nu acționează forțele de coeziune, singurele forțe care acționează asupra moleculelor fiind acelea ce iau naștere în momentul ciocnirii elastice dintre ele sau de pereții vasului. Din această cauză, traiectoria moleculelor dintre două ciocniri este un segment de dreaptă, iar traiectoria în ansamblul ei este o linie frântă. Mărima segmentului de dreaptă care formează traiectoria moleculei între două ciocniri se numește drumul liber al moleculei între două ciocniri. Media aritmetică a drumurilor libere ale tuturor moleculelor conținute într-o masă de gaz se numește drumul liber mediu al moleculelor acestui gaz.

Acest model s-a dovedit foarte fecund, Maxwell și după el Boltzmann și alții, folosind principiile mecanicii și legile teoriei probabilităților, au putut deduce legile gazelor perfecte. Pentru a se evita limitarea acestui model, pe lângă mișcarea de translație a moleculelor s-a atribuit moleculelor și o mișcare de rotație, în jurul unei axe a lor și chiar mișcări ale atomilor în interiorul moleculei.

Experiența arată că gazele reale nu se supun decît aproximativ legilor gazelor perfecte. Abaterile constante sînt datorate următoarelor două cauze:

Prima cauză de abateri este datorată faptului că moleculele nu sînt punctuale și că au un volum propriu, iar atunci cînd presiunea crește, volumul gazului nu poate tinde spre zero, cum ar urma dacă gazul s-ar supune legilor gazelor perfecte.

A doua cauză de abateri de la legile gazelor perfecte este datorată existenței interacțiunii dintre molecule. Cînd presiunea crește, distanța medie dintre molecule scade, astfel încît moleculele, apropiindu-se unele de altele încep să intervină forțe de coeziune. Atracția dintre molecule joacă în acest caz rolul unei presiuni suplimentare, numită *presiune internă*.

Pentru eliminarea acestor neajunsuri a fost propus modelul de gaz Van der Waals, în care spațiul în care se mișcă moleculele nu este egal cu volumul  $V$  al vasului în care se găsește gazul, ci cu diferența  $V - b'$  dintre volumul  $V$  al gazului și un volum  $b'$  care depinde de suma volumelor moleculelor. Cum între molecule se exercită și forțe de coeziune, reprezentate printr-o presiune internă  $p'$ , ecuația de stare a gazelor perfecte,

$$pV = RT,$$

a fost corectată sub forma

$$(p + p')(V - b') = RT.$$

O analiză mai amănunțită, bazată pe teoria cinetico-moleculară a gazelor arată că  $p'$  este invers proporțional cu pătratul volumului molecular  $V$  și  $b'$  este egal cu  $4b$  și poartă numele de covolum,  $b$  fiind suma volumelor tuturor moleculelor dintr-un mol de gaz.

În cele din urmă, ecuația gazelor reale pentru un mol de gaz, numită și ecuația Van der Waals, va fi

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - 4b) = RT,$$

$a$  și  $b$  fiind constante ce depind de natura gazului.

Domeniul de aplicație al ecuației Van der Waals este mai întins decît al ecuației de stare a gazelor perfecte; se aplică în special în domeniul temperaturilor și presiunilor apropiate de punctul de lichefiere al gazelor, unde ecuația de stare a gazelor perfecte nu dă rezultate. La rîndul său acest model nu constituie totuși decît o altă aproximație, care se apropie mai mult de realitatea faptelor experimentale.

## 4.2. Energia

Dacă privim mișcarea în sensul cel mai general și anume, acela de transformare sau schimbare de stare a unui corp sau sistem fizic, măsura acestei mișcări poartă numele de energie. Energia unui sistem se măsoară în unități de lucru mecanic. Lucrul mecanic este egal cu produsul scalar dintre forța  $\vec{F}$  (presupusă constantă) și deplasare  $\vec{l}$  (fig. 4.1)

$$W = \vec{F} \cdot \vec{l} = Fl \cos \alpha,$$

Fig. 4.1.



în care  $\alpha$  este unghiul făcut de direcția forței cu direcția deplasării (atunci cînd corpul asupra căruia acționează forța  $\vec{F}$  este supus la legături). În cele ce urmează, vom privi deci lucrul mecanic ca un mijloc de transfer al energiei de la un corp la altul, de la un sistem la altul, prin inter-

mediul unei forțe. Energia (de fapt variația ei) va avea întotdeauna dimensiunile lucrului mecanic și anume a produsului dintre forță și lungime

$$|\Delta W| \Leftrightarrow |\vec{F} \cdot \vec{l}| = ML^2T^{-2}.$$

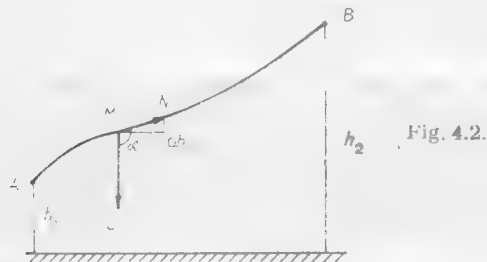
Ca și lucrul mecanic energia este o mărime scalară.

În mecanică, energia se întâlnește mai ales sub două forme principale: energie potențială și energie cinetică.

#### 4.2.1. Energia potențială. Exemple

*Variația energiei potențiale a unui corp sub acțiunea gravitației.* Se consideră un corp asimilat cu un punct material, aflat sub acțiunea forței gravitaționale; așadar avem de a face de fapt cu sistemul corp-Pământ. Greutatea corpului  $\vec{G}$  este o forță verticală, îndreptată în jos, pe care o vom considera constantă pentru variații de înălțime nu prea mari (fig. 4.2). Dacă vom deplasa corpul în câmpul gravitațional după o traiectorie  $AB$ , lucrul mecanic făcut de corp pentru deplasarea elementară  $MN$  va fi

$$dW = \vec{G} \cdot \vec{MN} = G \cdot MN \cdot \cos \alpha.$$



Când  $MN \rightarrow 0$  se obține  $dW = -Gdh$ , în care s-a luat semnul minus fiindcă  $\vec{G}$  se opune deplasării (lucrul mecanic este rezistent).

Lucrul mecanic total va fi

$$W = - \int_{h_1}^{h_2} Gdh = -G(h_2 - h_1) = -G\Delta h.$$

Mărima cu semn schimbat a acestei expresii,

$$W_p = G\Delta h,$$

poartă numele de variație a energiei potențiale. Această variație este egală cu lucrul mecanic ce-l poate face corpul dacă este lăsat să cadă de la înălțimea  $h_2$  la  $h_1$ . De aceea se spune că prin deplasarea corpului de la înălțimea  $h_1$  la  $h_2$ , cu  $h_2 > h_1$ , energia potențială a corpului a crescut cu  $\Delta W_p$ . În ipoteza absenței frecărilor, această variație nu depinde de drumul parcurs de corp, ci numai de diferența de înălțime.

*Variația energiei potențiale a unei bare supuse la întindere.*

Dacă asupra unei bare se acționează cu o forță  $\vec{F}$ , în limita elasticității, în conformitate cu legea lui Hooke, bara se va alungi cu

$$x = \frac{1}{E} \frac{l}{S} F,$$

în care  $l$  și  $S$  sînt lungimea și respectiv aria secțiunii drepte a barei, iar  $E$  un coeficient ce depinde de natura materialului din care este făcută bara, numit modul de elasticitate sau modulul lui Young. Alungirea este deci funcție de mărimea forței  $\vec{F}$ , iar lucrul mecanic făcut de forța elastică, care se opune alungirii, cînd bara este alungită cu  $\Delta l$  este

$$W = \int_0^{\Delta l} -Fdx = \int_0^{\Delta l} -\frac{ES}{l} x dx = -\frac{1}{2} \frac{ES \Delta l^2}{l}.$$

Am notat cu  $x$  alungirea variabilă, în funcție de forța  $\vec{F}$ , și s-a introdus semnul minus fiindcă forța elastică ce se dezvoltă în bară în timpul deformăției se opune alungirii. Schimbînd semnul, obținem expresia energiei potențiale care caracterizează bara, adică lucrul mecanic pe care-l poate executa bara asupra mediului exterior, după ce a suferit deformarea elastică,

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{ES \Delta l^2}{l}.$$

Vom numi energie potențială, energia dependentă de poziția corpurilor care interacționează între ele prin forțe. Din cele arătate mai sus rezultă că pentru a afla energia potențială a unui sistem de două sau mai multe corpuri care interacționează între ele prin forțe, calculăm suma

lucrurilor mecanice făcute de forțele interioare (rezistente) ale sistemului, necesare pentru a-l aduce dintr-o poziție (reper) de energie potențială nulă (sau socotită convențional nulă) în poziția considerată și apoi îi schimbăm semnul. Întrucât pentru calcularea energiei potențiale a corpului este necesară alegerea unei poziții reper, rezultă că în mecanica nerelativistă, nu putem calcula valoarea absolută a energiei potențiale, ci numai variația ei, și aceasta doar cu aproximația unei constante aditive arbitrare.

#### 4.2.2. Energia cinetică. Teoremă

Considerăm un corp asimilat cu un punct material, care are viteza  $\vec{v}_1$  când începe să acționeze asupra lui o forță  $\vec{F}$ . Presupunem că în timpul  $\Delta t = t_2 - t_1$ , corpul a parcurs distanța  $\Delta s = s_2 - s_1$ , viteza sa ajungând la valoarea  $\vec{v}_2$ . Lucrul mecanic efectuat de forța  $\vec{F}$  va fi

$$\begin{aligned} W &= \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} m \vec{a} d\vec{s} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt \\ &= m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} \frac{d\vec{v}^2}{2} = \\ &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta W_c. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Expresia  $\frac{mv^2}{2} = W_c$  poartă numele de energie cinetică a punctului material de masă  $m$  avînd viteza  $v$ . Deci, dacă o forță acționează asupra unui punct material în mișcare, lucrul mecanic făcut de forță este egal cu variația energiei cinetice a corpului.

Ca și energia potențială, energia cinetică este o mărime căreia nu-i putem măsura decît variația ei, deci valoarea ei relativă față de un sistem de referință.

#### 4.2.3. Conservarea energiei

Se constată că dacă într-un sistem închis (asupra căruia nu acționează forțe exterioare) se neglijează acțiunea forțelor de frecare, suma variațiilor energiei potențiale și

energiei cinetice a sistemului este constantă. Acesta este enunțul teoremei conservării energiei mecanice. Să evidențiem această teoremă printr-un exemplu. Considerăm o mică sferă de masă  $m$  (asimilată cu un punct material), fixată cu ajutorul a două resorturi identice, presupuse lipsite de masă și de frecare, astfel încît asupra sferei acționează numai forțele elastice dezvoltate de resorturi. Dispozitivul reprezintă modelul a ceea ce se numește în fizică un oscilator armonic liniar (fig. 4.3). Se scoate sfera

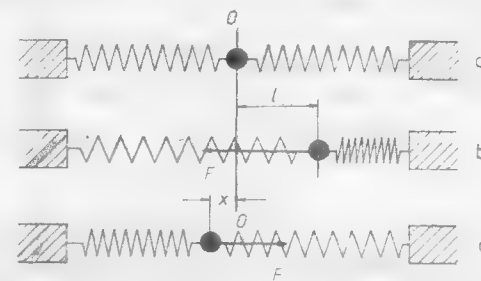


Fig. 4.3.

din poziția de echilibru dîndu-i o deplasare  $l$ , lăsînd-o apoi să se miște sub acțiunea resorturilor.

Asupra sferei acționează în orice moment o forță elastică  $F = -kx$  proporțională cu elongația  $x$  și îndreptată în sens contrar cu ea. Pentru a calcula variația energiei potențiale, vom calcula mai întîi lucrul mecanic făcut de această forță elastică la deplasarea sferei din poziția reper, de elongație zero, pînă în poziția de elongație  $x$  și apoi îi vom schimba semnul,

$$-\Delta W_{px} = \int_0^x F dx = - \int_0^x kx dx = -k \frac{x^2}{2}.$$

Cum energia este definită pînă la o constantă aditivă arbitrară, este suficient să se convină a se lua  $W_{px}(0) = 0$ , ceea ce permite ca în locul variației energiei potențiale să se scrie energia potențială sub forma

$$W_{px} = k \frac{x^2}{2}.$$

Variația energiei potențiale în timpul în care sfera este adusă pînă în poziția de elongație maximă  $l$  este

$$W_p = k \frac{l^2}{2}.$$

Pe de altă parte, lucrul mecanic făcut de forțele elastice cînd sfera trece din poziția de elongație maximă  $l$  în poziția de elongație  $x$  este egal cu variația energiei cinetice între aceste două poziții,

$$\begin{aligned} \Delta W_c &= \frac{mv_x^2}{2} - \frac{mv_l^2}{2} = \int_l^x F dx = - \int_l^x kx dx \\ &= k \frac{l^2}{2} - k \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Deoarece însă, în poziția de elongație  $l$ , viteza  $v_l$  este egală cu zero, obținem

$$\Delta W_c = \frac{mv_x^2}{2} = k \frac{l^2}{2} - k \frac{x^2}{2}.$$

Într-o poziție de elongație  $x$  sfera are atît energie potențială, cît și energie cinetică, astfel încît suma variațiilor energiei cinetice și potențiale, într-o poziție oarecare, va fi egală cu variația energiei totale

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta W_p + \Delta W_c = \frac{kx^2}{2} + \left( k \frac{l^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) = \\ &= k \frac{l^2}{2} = k \frac{A^2}{2}, \end{aligned}$$

$l$  fiind elongația maximă, adică amplitudinea  $A$  a mișcării oscilatorii armonice.

Faptul că energia totală este o funcție de viteze și de poziție,  $W = W(v_x, v_y, v_z, x, y, z)$ , rezultă că în limitele mecanicii newtoniene, teorema conservării energiei se poate formula astfel: într-un sistem izolat de corpuri, suma energiilor cinetice  $W_c$  și potențiale  $W_p$  este constantă,

$$W_c(v_x, v_y, v_z) + W_p(x, y, z) = \text{const.}$$

Principiul conservării energiei mecanice, astfel cum a fost arătat mai sus, acționează numai în cazul ideal, al sistemelor fără frecări. Se știe însă că sisteme fără frecare nu există în natură. Lucrul mecanic făcut de forțele de frecare se transformă în căldură, clădura fiind astfel și ea un alt mod de transmitere a energiei. Transformările termice ale sistemelor și fenomenelor mecanice ce le însoțesc formează obiectul termodinamicii.

Termodinamica este unul dintre cele mai importante capitole din fizică; apariția și dezvoltarea ei au dus la fundamentarea concepțiilor moderne despre energie.

Termodinamica are la bază cinci principii de natură experimentală. Principiul general, numit și primul postulat al termodinamicii, afirmă că un sistem izolat evoluează spre starea de echilibru termodinamic și rămîne în această stare atît timp cît parametrii săi externi sînt menținuți constanți. Principiul zero, numit și al doilea postulat al termodinamicii afirmă că două sisteme termodinamice care se află în echilibru termodinamic cu un al treilea sînt în echilibru termodinamic sau, mai general, tranzitivitatea este o proprietate generală a echilibrului termodinamic. Principiul întii al termodinamicii se postulează, din el rezultînd ca un caz particular conservarea energiei. Principiul al doilea, numit și principiul entropiei conține două afirmații independente: principiul al doilea pentru procesele reversibile și, separat, pentru procesele ireversibile. În sfîrșit, principiul al treilea al termodinamicii postulează faptul că entropia unei substanțe pure condensate se anulează la zero absolut.

În majoritatea cazurilor, în literatura didactică, se consideră principiul general și principiul zero al termodinamicii ca fiind postulatele termodinamicii, iar ca principii propriu-zise, principiile I, al II-lea și al III-lea. Marele fizico-chimist german Walter Nernst — laureat al premiului Nobel pentru chimie pe anul 1920 — justifică în glumă, bineînțeles, astfel imposibilitatea existenței unui al patrulea principiu al termodinamicii: „Enunțarea primului principiu este legată de activitatea a trei savanți (Mayer, Joule, Helmholtz); formularea celui de-al doilea principiu se bazează pe cercetările a doi savanți (Clausius și Thomson); cel de-al treilea a fost stabilit de o singură persoană — de mine. Prin urmare ...”.

Principiul întii al termodinamicii este pus în evidență, mai ales de faptul că totdeauna cînd într-un sistem



au loc „pierderi” de energie mecanică, din cauza lucrului mecanic făcut de forțele de frecare ce se produc în interiorul sistemului, se dezvoltă căldură.

Pe baza generalizării unui număr foarte mare de experiențe, principiul întâi al termodinamicii afirmă, indiferent de dispozitivele folosite, echivalența dintre căldură și lucru mecanic. Echivalența dintre lucru mecanic și căldură se postulează astfel: căldura comunicată unui sistem termodinamic servește parțial la variația energiei interne a sistemului și restul la efectuarea de lucru mecanic. Raportul dintre lucrul mecanic și căldura respectivă este întotdeauna același.

Din această cauză, se poate folosi pentru măsurarea căldurii aceeași unitate de măsură ca și pentru lucrul mecanic, care în S.I. este joulul. În acest fel,

$$W \Leftrightarrow Q. \quad (4.2)$$

Pentru studiul proceselor termodinamice, în care sistemul schimbă căldură și lucru mecanic cu mediul exterior, este necesară stabilirea unei convenții asupra semnelor mărimilor menționate, întrucât transferul respectiv se poate face în ambele sensuri: de la sistem spre exterior sau invers. Deși poate fi adoptat orice fel de convenție a semnelor, avînd în vedere însă că termodinamica s-a născut din nevoile practicii, vom adopta convenția care scoate în evidență latura practică a fenomenelor. În cadrul acestei convenții, se dau semne pozitive pentru căldura primită de sistem și pentru lucrul mecanic efectuat de sistem asupra mediului înconjurător și invers, semne negative situațiilor contrare.

Considerînd o convenție de semn prin care căldura și lucrul mecanic primite de un sistem sînt considerate pozitive, se poate formula principiul întâi al termodinamicii, astfel: energia unui sistem termodinamic se poate modifica fie efectuînd lucru mecanic asupra sistemului, fie transferînd căldură sistemului,

$$\Delta U = W + \Delta Q.$$

În acest fel „echivalența” dintre căldură și lucrul mecanic este conținută în relația de mai sus.

În cazul general, cînd sistemul schimbă căldură și lucru mecanic cu mediul exterior, iar după o serie de transformări trece de la o stare inițială la o stare finală, diferită de cea inițială, excesul de căldură care nu apare sub formă

de lucru mecanic nu se pierde, ci conduce la variația energiei sale interne. Această energie internă este energia (cinetică, potențială etc.) transferată moleculelor din care este constituit sistemul.

Deci, în forma sa generală, principiul I al termodinamicii se scrie

$$Q = \Delta U + W, \quad (4.3)$$

iar sub formă diferențială,

$$dQ = dU + dW. \quad (4.4)$$

Energia internă  $U$  este funcție de parametrii de stare ai sistemului, variația  $\Delta U$  depinzînd numai de starea inițială și de cea finală a sistemului.

Relațiile (4.3) și (4.4) exprimă forma generală a principiului conservării energiei și anume: nu se poate produce energie din nimic, iar acolo unde „dispare” o cantitate de energie, într-o formă oarecare, este regăsită sub o altă formă, în cantitate egală. Principiul I al termodinamicii infirmă posibilitatea creării unui *perpetuum mobile* de speță I, adică a unei mașini care să producă lucru mecanic neconsumînd nimic. Într-adevăr, dacă în relația (4.3)  $Q = 0$ , urmează că lucrul mecanic ce îl poate produce sistemul se face prin consumarea energiei sale interne. Această energie fiind limitată, după un timp mai mare sau mai mic de funcționare, mașina respectivă se va opri.

Principiul întâi nu arată însă sensul în care poate evolua un sistem. Principiul al doilea al termodinamicii arată acest sens, prin introducerea altei mărimi (care este funcție de parametrii de stare ai sistemului), numită entropie și care se notează cu  $S$ ; principiul al doilea afirmă că orice sistem izolat, real (în care transformările sînt ireversibile) evoluează spontan, în sensul creșterii entropiei. Creșterea entropiei este interpretată drept creșterea dezordinii elementelor sau particulelor din care este format sistemul.

Principiul al treilea al termodinamicii stabilește că entropia tuturor sistemelor termodinamice în echilibru stabil sau nestabil tinde spre zero la temperatura de zero absolut.

Importanța principiului conservării energiei decurge din universalitatea sa; el este confirmat în toate domeniile fizicii, atît la scară macroscopică cît și la scară microscopică și se aplică în toate științele naturii. Folosirea acestui principiu devine un mijloc foarte util și eficient de investigație, atît în cercetare, cît și în studiul fizicii.

Un astfel de aspect îl întâlnim, de exemplu în electricitate, în expresia legii (experimentale) a lui Joule, care arată că la trecerea unui curent de intensitate constantă  $I$  printr-un rezistor de rezistență  $R$ , într-un timp  $t$ , se transmite în exterior căldura

$$Q = RI^2 t. \quad (4.5)$$

În efectul Joule, energia mecanică a electronilor liberi — numiți și electroni de conducție — puși în mișcare de tensiunea electromotoare, se transformă în căldură, din cauza rezistenței ce o opun mișcării lor restul atomilor ce formează rețeaua cristalină a metalului, printre care se deplasează electronii.

Ținând seama de echivalența dintre lucru mecanic și căldură, formula (4.5) exprimă și energia curentului electric,

$$W = RI^2 t. \quad (4.6)$$

În conformitate cu legea lui Ohm (notînd cu  $U$  tensiunea aplicată rezistenței  $R$ ),

$$I = \frac{U}{R},$$

din (4.6), pentru energia curentului care circulă într-un circuit, obținem relația

$$W = UI t. \quad (4.7)$$

Dacă ținem seama că

$$I = \frac{Q}{t}, \quad (4.8)$$

unde  $Q$  este cantitatea de electricitate transportată de curent în timpul  $t$ , din (4.7) și (4.8) în cazul unui curent continuu și cu intensitate constantă, obținem energia disipată pe rezistența  $R$ ,

$$W = UQ.$$

Evident că în cazul unui circuit închis, în care tensiunea electromotoare  $\mathcal{E}$  este tensiunea de-a lungul întregului circuit.

$$W = \mathcal{E}Q,$$

iar pentru un curent variabil

$$dW = U dQ \text{ respectiv } dW = \mathcal{E} dQ. \quad (4.9)$$

În cele ce urmează vom folosi principiul conservării energiei pentru a calcula energia unui condensator încărcat cu sarcina electrică  $Q$ .

#### 4.2.4. Energia unui condensator

Vom începe prin a calcula lucrul mecanic efectuat de forța de interacțiune dintre două corpuri considerate punctiforme, unul încărcat cu sarcina  $q = +1$  și care se deplasează pe traiectoria  $MA$  și altul încărcat cu sarcina  $Q$  și aflat în punctul  $O$  (fig. 4.4). Între cele două corpuri încărcate electric se va exercita forța coulombiană

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2},$$

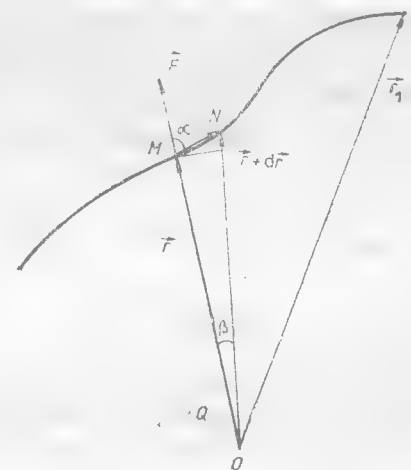


Fig. 4.4.

$r$  fiind distanța din punctul  $O$  la unitatea de sarcină, iar  $\epsilon$  permitivitatea mediului. Lucrul mecanic efectuat de forța  $\vec{F}$  pentru a deplasa corpul încărcat cu sarcina  $q = +1$  pe distanța elementară  $\overline{MN} = d\vec{l}$  este

$$dW = \vec{F} \cdot \overline{MN} = F \cdot MN \cos \alpha.$$

La limită, cînd  $\beta \rightarrow 0$ ,  $MN \cos \alpha \rightarrow dr$ , de unde  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  și deci

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{Q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int d\left(\frac{Q}{r}\right) = \\ = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{r_1}\right).$$

Observăm că lucrul mecanic nu depinde de forma drumului străbătut de corpul încărcat cu unitatea de sarcină, ci numai de distanțele  $r$  și  $r_1$ .

Dacă  $r_1 \rightarrow +\infty$ , mărimea  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} = V$  poartă

numele de potențialul cîmpului produs de sarcina  $Q$  într-un punct aflat la distanța  $r$ . Potențialul electric este o mărime scalară. El este egal numeric cu lucrul mecanic făcut de forțele electrice care deplasează un corp încărcat cu sarcina  $q$ , egală cu o unitate, dintr-un punct al cîmpului electric creat de sarcina electrică  $Q$  la infinit.

Dacă în loc de o sarcină fixă în raport cu un referențial inerțial, se consideră mai multe sarcini  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ , ce se găsesc la distanțele  $r_1, r_2, r_3, \dots$  de punctul considerat, atunci, în virtutea independenței acțiunii forțelor potențialul din acest punct va fi

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}. \quad (4.10)$$

De observat că dacă se lasă liberă o sarcină electrică, aflată sub acțiunea altor sarcini fixe, sarcina respectivă se va deplasa de la un potențial mai mare spre unul mai mic.

Vom considera un corp pe care sînt distribuite sarcinile electrice  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  (fig. 4.5). Potențialul într-un punct  $O$  al corpului va fi dat de relația (4.10). Dacă acest corp este bun conductor electric (în interiorul căruia sarcinile electrice — electronii — se pot mișca liber), din cauza forțelor de respingere dintre sarcini, acestea se vor distribui pe suprafața conductorului, în așa fel încît toate punctele conductorului, deci și cele de pe suprafața sa, vor avea același potențial.

Dacă diferite puncte ale conductorului ar avea potențiale diferite, sarcinile din punctele cu potențial mai mare se vor deplasa în punctele cu potențial mai mic, pînă se va ajunge la o stare de echilibru stabil, în care toate punctele conductorului vor avea același potențial.

De aceea vom putea spune că potențialul unui conductor încărcat electric este egal cu lucrul mecanic necesar pentru a aduce unitatea de sarcină electrică pozitivă de la infinit, în orice punct de pe suprafața sa. Dacă sarcina electrică se aduce mai întîi în interiorul corpului, ea ajunge spontan la suprafață.

Dacă se dau doi conductori încărcati cu electricitate la potențialele  $V_1$  și  $V_2$ , lucrul necesar pentru a trece o sarcină  $Q$  de pe un conductor pe altul este evident egal cu

$$W = Q(V_1 - V_2). \quad (4.11)$$

Vom considera doi conductori  $A$  și  $B$  apropiați unul de celălalt (fig. 4.6) care se leagă la polii unui generator de curent electric. Cei doi conductori fiind inițial neîncărcați electric, generatorul de curent electric va transporta

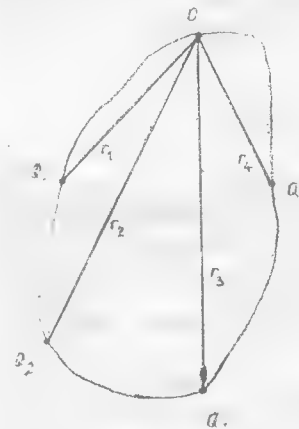


Fig. 4.5.

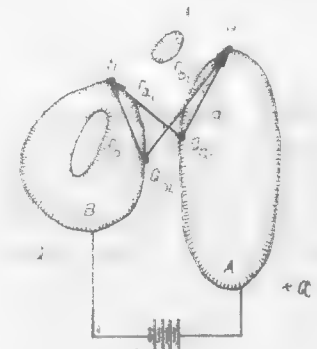


Fig. 4.6.

de la unul la altul o sarcină  $Q$  de electricitate, încît după un timp oarecare (foarte scurt), unul dintre conductori va avea o sarcină  $+Q$ , iar celălalt  $-Q$ . Potențialul conducto-

rului  $A$  într-un punct oarecare  $M$  al său (egal cu potențialul conductorului), conform cu (4.10) este

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{Q_{a_1}}{r_{a_1}} + \frac{Q_{a_2}}{r_{a_2}} + \dots + \frac{Q_{a_i}}{r_{a_i}} + \dots + \frac{Q_{b_1}}{r_{b_1}} + \frac{Q_{b_2}}{r_{b_2}} + \dots + \frac{Q_{b_i}}{r_{b_i}} + \dots \right);$$

$Q_{a_1}, Q_{a_2}, \dots$  și  $Q_{b_1}, Q_{b_2}, \dots$  sînt sarcinile elementare ale suprafețelor conductorilor  $A$  și, respectiv,  $B$ , iar  $r_{a_1}, r_{a_2}, \dots, r_{b_1}, r_{b_2}, \dots$ , distanțele dintre punctul  $M$  și sarcinile elementare  $Q_{a_1}, \dots, Q_{b_i}$ .

Tot astfel, potențialul conductorului  $B$  într-un punct  $N$  este

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{Q_{a_1}}{r'_{a_1}} + \frac{Q_{a_2}}{r'_{a_2}} + \dots + \frac{Q_{a_i}}{r'_{a_i}} + \dots + \frac{Q_{b_1}}{r'_{b_1}} + \frac{Q_{b_2}}{r'_{b_2}} + \dots + \frac{Q_{b_i}}{r'_{b_i}} + \dots \right),$$

în care  $r'_{a_1}, r'_{a_2}, \dots, r'_{b_1}, r'_{b_2}, \dots$  sînt distanțele dintre punctul  $N$  și aceleași sarcini elementare. Deci

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_{a_1}} - \frac{1}{r'_{a_1}} \right) Q_{a_1} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_{b_1}} - \frac{1}{r'_{b_1}} \right) Q_{b_1} + \dots$$

Dacă multiplicăm cu  $m$  sarcinile  $Q_{a_1}, \dots, Q_{b_i}, \dots$  se multiplică cu  $m$  și sarcinile  $+Q$  și  $-Q$ , precum și potențialele  $V_1, V_2$  și diferența  $V_1 - V_2$ . Obținem astfel o nouă stare de echilibru cu sarcinile totale  $+mQ$  și  $-mQ$ , cu o tensiune sau diferență de potențial  $m(V_1 - V_2)$ . Așadar, sarcina fiecărui conductor este proporțională cu tensiunea dintre cei doi conductori.

$$Q = C(V_1 - V_2). \quad (4.12)$$

Acest sistem de doi conductori apropiați este forma generală a unui condensator, iar coeficientul de proporționalitate  $C$  se numește capacitatea condensatorului și depinde de forma conductorilor, de poziția lor relativă și de permitivitatea mediului dintre armături.

Dacă se transferă o sarcină  $dQ$  de pe conductorul  $B$  pe conductorul  $A$ , notînd cu  $U$  tensiunea electromotoare a generatorului de curent electric și neglijînd pierderile prin efectul Joule, rezultă

$$dW = UdQ.$$

După ce am întrerupt legăturile dintre conductorii  $A$  și  $B$  cu generatorul de curent electric, trecem mecanic aceeași sarcină electrică  $dQ$ , înapoi de pe  $A$  pe  $B$ , cu ajutorul unui conductor  $A'$ , pe care îl atingem de  $A$  și pe care îl transportăm și îl descărcăm pe  $B$ , atingîndu-l de interiorul acestuia. Lucrul efectuat de acest transport mecanic al sarcinii  $dQ$  de pe  $A$  pe  $B$  este

$$dW = (V_1 - V_2) dQ.$$

În virtutea principiului conservării energiei, trebuie să avem

$$UdQ = (V_1 - V_2) dQ, \text{ de unde } U = V_1 - V_2.$$

În realitate, deși tensiunea electromotoare este egală numeric cu diferența de potențial electric dintre conductorii  $A$  și  $B$ , ele sînt în general mărimi diferite. Și anume, în timp ce tensiunea electromotoare este egală cu integrala de linie a cîmpului imprimat,

$$U = \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{r},$$

diferența de potențial se scrie

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 \vec{E}_i \cdot d\vec{r},$$

unde  $\vec{E}_i$  este un cîmp care derivă dintr-un potențial, în timp ce  $\vec{E}_e$ , cîmpul imprimat, nu derivă dintr-un potențial.

Să presupunem că în cazul condensatorului  $A + B$  mai sus considerat, facem să varieze tensiunea electromotoare a generatorului, treptat de la zero la  $U$  și sarcina electrică de la zero la  $Q$ . Vom avea, în fiecare moment,

$$Q = C(V_1 - V_2) = CU.$$

Când  $U$  crește cu  $dU$ , sarcina crește cu

$$dQ = C dU.$$

Energia dielectricului dintre armături este

$$W = \int_0^Q U dQ = C \int_0^U U dU = \frac{1}{2} C U^2, \quad (4.13)$$

această energie fiind o caracteristică a dielectricului condensatorului.

Sarcina electrică a condensatorului fiind

$$Q = CU,$$

rezultă că tensiunea la bornele condensatorului este

$$U = \frac{Q}{C} \quad (4.14)$$

#### 4.2.5. Energia cîmpului magnetic produs de un circuit electric

Orice circuit parcurs de un curent electric, produce în jurul său un cîmp magnetic în care se localizează o anumită energie. Se poate calcula această energie în virtutea formulei stabilită de Helmholtz și Kelvin,

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.15)$$

pentru fenomenul de inducție electromagnetică, descoperit de Faraday. În relația (4.15)  $\mathcal{E}$  este tensiunea electromotoare indusă într-un circuit, iar  $\frac{d\Phi}{dt}$  este viteza de variație a fluxului de inducție magnetică.

Dacă circuitul este parcurs de curentul electric de intensitate  $I$ , același circuit este străbătut de fluxul  $\Phi$ . Cîmpul de inducție magnetică  $B$ , datorit curentului, după cum arată experiența, este în fiecare punct al spațiului, proporțional cu curentul  $I$  (în presupunerea că permeabilitatea magnetică este independentă de  $B$ ). Ca urmare, fluxul ce străbate circuitul va fi și el proporțional cu  $I$ ,

$$\Phi = LI \quad (4.16)$$

Coefficientul de proporționalitate  $L$  poartă numele de inductanța circuitului și depinde numai de mărimile geometrice care caracterizează circuitul și de mediu. Dacă circuitul considerat nu se găsește în prezența altor circuite, ținînd seama de (4.16), obținem

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (4.17)$$

și reprezintă tensiunea electromotoare datorată variației curentului electric ce parcurge circuitul, numită și tensiune electromotoare de autoinducție. Această tensiune se opune variațiilor de intensitate a curentului electric (legea lui Lenz).

Vom considera cazul general al unui circuit caracterizat prin rezistența  $R$  și inductanța  $L$ . Presupunem că acestui circuit îi aplicăm o tensiune electromotoare variabilă, de la valoarea zero pînă la valoarea finală  $\mathcal{E}$ . În același timp  $t$  și intensitatea curentului va crește de la zero la o valoare  $I$ , iar fluxul  $\Phi$  ce străbate circuitul, la rîndul lui, va varia de la zero la  $\Phi$ .

Aplicînd legea lui Ohm și ținînd seama că tensiunea electromotoare rezultantă va fi egală cu tensiunea electromotoare a sursei de curent căreia i se opune tensiunea electromotoare de autoinducție, se obține

$$\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt} = RI$$

sau

$$\mathcal{E} = RI + \frac{d\Phi}{dt}.$$

Înmulțind cu  $Idt$  și integrînd, putem scrie

$$\int_0^t \mathcal{E} I dt = \int_0^t RI^2 dt + \int_0^\Phi I d\Phi.$$

Cum însă

$$Idt = dQ,$$

iar

$$\int_0^t \mathcal{E} I dt = \int_0^Q \mathcal{E} dQ = W$$



reprezintă energia produsă de sursa de curent electric în timpul  $t$ , rezultă

$$W = \int_0^t RI^2 dt + \int_0^\Phi I d\Phi,$$

în care primul termen din membrul al doilea reprezintă căldura degajată în rezistor, iar ultimul termen, o nouă formă de energie necesară stabilirii curentului  $I$  în circuit — energia magnetică a circuitului

$$W_m = \int_0^\Phi I d\Phi,$$

care servește la formarea cîmpului de inducție magnetică și caracterizează acest cîmp.

Dacă permeabilitatea  $\mu$  a mediului este independentă de  $B$ , deci de  $I$ ,  $L$  este atunci constant. Avînd în vedere că  $\Phi = LI$ , obținem

$$W_m = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2. \quad (4.18)$$

#### 4.2.6. Expresia energiei în teoria relativității

În evoluția ideilor ce au dominat fizica de-a lungul timpului, nu rareori teorema conservării energiei a jucat un rol esențial.

S-a demonstrat că energia totală sub diferitele ei aspecte rămîne constantă în timpul unei transformări, care se desfășoară într-un sistem închis. Exemplul cel mai simplu îl oferă mecanica sistemelor fără rezistențe la fricare, astfel cum s-a arătat în secțiunea 4.2.3.

$$W_c + W_p = \text{const.}$$

în care  $W_c$  și  $W_p$  sînt energia cinetică și respectiv cea potențială a sistemului (a căror măsură este lucrul mecanic ce îl pot transmite).

Concepția asupra energiei a trecut printr-un moment extrem de important, cînd fizicienii au început să mediteze asupra localizării energiei. Mecaniciștii au avut de întîm-

pinat dificultăți de ordin teoretic. În fond singura formă de energie complet intuitivă în mecanică este energia cinetică (căreia i se spunea la început „forță vie”).

Fizicienii au acceptat destul de greu noțiunea de energie potențială. Astfel, se spunea: dacă energia cinetică ni se pare că descrește (atunci cînd se transformă în energie potențială), această descreștere este numai aparentă și că de fapt energia potențială nu este decît energia cinetică a unui alt mediu. Spre exemplu, energia potențială a unui gaz sub presiune nu este altceva decît energia cinetică a moleculelor de gaz, deci a unui mediu. Această explicație, luînd ca bază energia cinetică a unor medii ascunse, nu ne poate satisface, de exemplu, în cazul energiei potențiale a unui corp sub acțiunea gravitației, a energiei unui condensator, a energiei cîmpului magnetic produs de un circuit electric etc.

Aceste manifestări ale energiei conduc la concepția unei energii „localizate” în spațiu. La o concepție asemănătoare conduce și transmiterea prin radiație, nu numai a energiei (de exemplu, a căldurii soarelui), ci chiar și a forțelor, cum este cazul cu presiunea exercitată de lumină. De asemenea, după cum s-a arătat atunci cînd s-a determinat energia cîmpului magnetic produs de un circuit electric, curentul nu se stabilește instantaneu la valoarea sa finală, ci cu o anumită întîrziere.

Aceste probleme au fost rezolvate de teoria relativității a lui Einstein, care pornește de la ideea lui Maxwell a transmisiei interacțiunilor prin contiguitate.

Principiile de bază ale teoriei relativității restrînse au fost formulate de Albert Einstein, pentru a explica rezultatele negative ale lui Michelson, prin care se urmărea să se determine viteza Pămîntului față de spațiul absolut față de eter, care devenise un fel de materializare a spațiului absolut al lui Newton.

Aceste principii care constituie postulatele de bază ale teoriei relativității sînt:

*Principiul relativității restrînse.* Pentru stabilirea legilor fizice, toate sistemele de referință în mișcare de translație rectilinie și uniformă sînt identice. Același lucru mai poate fi exprimat prin aceea că prin nici o experiență efectuată în interiorul unui sistem, experiență de natură mecanică, electrică, luminoasă etc., nu se poate constata mișcarea rectilinie și uniformă.

**Principiul constantei vitezei luminii.** Viteza luminii în vid este o constantă universală. Această viteză nu depinde de starea de mișcare a sursei de lumină și este aceeași pentru toate sistemele de referință în mișcare rectilinie și uniformă. Viteza luminii este o constantă universală ce nu poate fi depășită.

**Observații.** Primul principiu al teoriei relativității restrinse este în concordanță cu mecanica clasică, fundamentată de Galilei și Newton, deci cu independența legilor fizice față de mișcările rectilinii și uniforme. Cel de al doilea principiu, acel al constantei vitezei luminii este însă în contradicție cu mecanica clasică.

De exemplu, să presupunem că pe un vehicul spațial în repaus față de un observator se găsește un izvor de lumină. Față de acest observator viteza luminii va fi de aproximativ 300 000 km/s. Să presupunem acum că acest vehicul se va pune în mișcare, cu o viteză de 25 000 de km/s, în direcția în care este emisă lumina. Conform mecanicii clasice viteza luminii față de același observator ar urma să fie, conform legii de compunere a vitezelor din mecanica clasică,

$$300\,000\text{ km/s} + 25\,000\text{ km/s} = 325\,000\text{ km/s}.$$

Potrivit principiului relativist al constantei vitezei luminii, viteza luminii va fi însă tot de 300 000 km/s. Și în general indiferent de sensul mișcării vehiculului spațial viteza luminii față de același observator se va menține tot de 300 000 km/s. Urmează deci că în mecanica relativistă adunarea vitezelor trebuie să fie făcută în alt mod, după cum se va vedea în cele ce urmează.

**Grupul de transformări Galilei.** Orice eveniment este localizat când i se cunoaște poziția determinată prin cele trei coordonate spațiale precum și timpul când s-a produs. Vom considera două referențiale inerțiale: unul,  $Oxyz$ , și altul,  $O'x'y'z'$ , mobil, care se deplasează de-a lungul lui  $Ox$  în sens pozitiv avînd o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza  $\vec{v}$  în raport cu primul (fig. 4.7). Considerăm un eveniment ce se produce în punctul  $M$ , în repaus față de sistemul de coordonate  $Oxyz$ . Acest punct va fi reperat în acest sistem prin coordonatele  $x, y, z$  și de timpul  $t$ , măsurat din momentul în care cele două sisteme de coordonate au fost în coincidență.

Din punctul de vedere al mecanicii clasice, același eveniment va fi reperat în sistemul  $O'x'y'z'$  prin coordonatele

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (4.19)$$

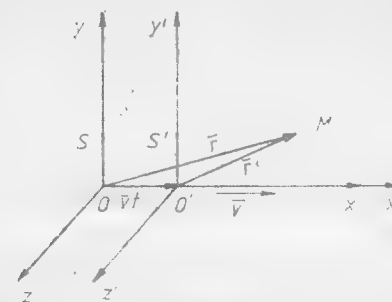


Fig. 4.7.

Cum în mecanica clasică se consideră că scurgerea timpului nu este influențată de mișcarea rectilinie și uniformă, rezultă că

$$t' = t, \quad (4.19')$$

$t$  fiind măsurat de observatorul din sistemul  $Oxyz$ , iar  $t'$ , timpul măsurat de observatorul din sistemul  $O'x'y'z'$ . De asemenea, dacă se cunosc coordonatele evenimentului din sistemul  $O'x'y'z'$ , se pot obține coordonatele aceluiasi eveniment în sistemul  $Oxyz$  prin relațiile

$$\begin{aligned} x &= x' + vt, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Grupul relațiilor (4.19), (4.20) reprezintă relațiile de transformare Galilei și ele permit localizarea în spațiu și timp a unui eveniment în raport cu unul dintre cele două sisteme de coordonate, când se cunoaște localizarea lui în spațiu și în timp, în raport cu celălalt sistem.

Asemenea sisteme de referință, ce au mișcări rectilinii și uniforme, putînd avea viteze diferite, se mai numesc și sisteme inerțiale, pentru că numai față de aceste sisteme este satisfăcut principiul întâi al mecanicii, numit și principiul inerției. Se poate demonstra, de asemenea, că și celelalte două legi ale lui Newton sînt satisfăcute numai cînd sînt raportate față de acest fel de sistem de referință, motiv pentru care spunem că principiile mecanicii sînt invariante față de relațiile de transformare Galilei.

De exemplu, o mișcare uniformă de-a lungul axei absciselor, a cărei lege (stabilită de un observator din sistemul  $O'x'y'z'$ ) este

$$x' = v't',$$

$v'$  fiind viteza de deplasare în raport cu sistemul mobil. Dacă facem substituțiile conform grupului de transformări Galilei, obținem

$$x - vt = v't' \text{ sau } x = (v + v')t,$$

adică efectuează o mișcare uniformă și în raport cu sistemul  $Oxyz$ , cu o viteză

$$w = v + v'.$$

Ultima relație exprimă legea compunerii vitezelor în mecanica nerelativistă.

Trebuie menționat, de asemenea, că în mecanica newtoniană, în domeniul căreia se aplică grupul de transformări Galilei, masa corpurilor se conservă. Prin urmare, în această mecanică masa corpurilor are aceeași valoare, independent de sistemul de referință și de starea lui de mișcare.

**Relativitatea restrînsă și grupul de transformări Lorentz.** Vom calcula acum coordonatele unui eveniment cînd se trece de la un sistem inerțial la altul, ținîndu-se seama de postulatele teoriei relativității restrînse, ale lui Albert Einstein.

Fie din nou situația din figura 4.7, în care prin punctul  $M$  am reprezentat un eveniment reperat de observatorii din cele două sisteme de coordonate. Ținînd seama de principiile relativității, ne propunem să determinăm coordonatele  $x'y'z'$  și timpul  $t'$  din sistemul  $O'x'y'z'$ , așa cum sînt înregistrate de un observator din sistemul  $Oxyz$ , deci în funcție de elementele corespunzătoare  $x, y, z, t$ . Punctul fiind unic în sistemul fix, în sistemul mobil, îi corespunde

de asemenea, un punct unic, fapt care face ca soluția problemei propuse să fie univocă. Or, aceasta înseamnă că relațiile dintre elementele  $x, y, z, t$  și  $x', y', z', t'$  nu pot fi decît liniare; aceste ecuații vor fi de forma

$$\begin{aligned} x' &= ax + bt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= mx + nt \end{aligned} \quad (4.21)$$

unde  $a, b, m$  și  $n$  nu depind de alte elemente (în afară de  $x$  și  $t$ ),  $a, b, m$  și  $n$  fiind coeficienți ce urmează să fie determinați.

Să observăm mai întâi că pentru  $x = vt$  avem  $x' = 0$  și prin urmare din prima relație a sistemului (4.21) obținem

$$avt + bt = 0 \text{ sau } b = -av,$$

de unde,

$$x' = a(x - vt) \quad (4.22)$$

Înlocuind această relație în prima dintre ecuațiile sistemului (4.21), se obține sistemul

$$\begin{aligned} x' &= a(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= mx + nt. \end{aligned} \quad (4.23)$$

care conține numai trei coeficienți  $a, m$  și  $n$ , care trebuie să fie determinați. Pentru determinarea acestora, se folosește principiul al doilea al teoriei relativității, al constantei vitezei luminii. În acest sens luăm ca un prim eveniment emisia unui semnal luminos, cînd  $O$  și  $O'$  coincid sau  $t = t' = 0$ . După un timp, pentru observatorul din sistemul  $Oxyz$ , semnalul luminos atinge suprafața sferei,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0,$$

$c$  fiind viteza luminii.

Viteza luminii fiind o constantă universală, pentru observatorul din sistemul  $O'x'y'z'$ , după timpul  $t'$ , semnalul luminos se va găsi pe sfera

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0,$$

$x, y, z, t; x', y', z', t'$  fiind coordonatele în cele două sisteme ale aceluiași aparat care primește semnalul luminos (al doilea eveniment). Cele două sisteme fiind considerate inerțiale, legile fenomenelor nu se pot schimba când se trece de la un sistem la altul; de aceea trebuie ca

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (4.24)$$

Introducând în această identitate coordonatele din sistemul (4.23), se obține

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = (a^2 - c^2 m^2)x^2 + y^2 + z^2 + \\ + (a^2 v^2 - c^2 n^2)t^2 - 2(a^2 v + c^2 mn)xt,$$

de unde, prin identificarea termenilor, se obține

$$a^2 - c^2 m^2 = 1, \quad (4.25)$$

$$a^2 v^2 - c^2 n^2 = -c^2, \quad (4.26)$$

$$a^2 v + c^2 mn = 0. \quad (4.27)$$

Din (4.27) se obține valoarea lui  $m$ ,

$$m = -\frac{a^2 v}{c^2 n}, \quad (4.28)$$

pe care, introducând-o în (4.25), rezultă

$$n^2 = \frac{a^4 v^2}{c^2(a^2 - 1)}, \quad (4.29)$$

valoare din care, ținând seama de relația (4.26), obținem

$$a = \frac{1}{\alpha}, \text{ în care am notat } \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Introducând în continuare valoarea lui  $\alpha$  în formulele (4.29) și (4.28), în cele din urmă se obține

$$n = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ și } m = -\frac{1}{\alpha} \frac{v}{c^2} = -\frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

În sfârșit, formulele de transformare (4.23) devin

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.30)$$

din care putem deduce transformarea inversă,

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.31)$$

Accestea sînt relațiile transformării Lorentz speciale, din care rezultă că poziția și durata unui eveniment depind de sistemul de referință în care se efectuează măsurătoarea lor. Se observă, de asemenea, că aceste transformări trec în cele ale lui Galilei, dacă  $v \ll c$ . Adică transformările galileiene reprezintă, pentru viteze mici în comparație cu viteza luminii, un caz particular al transformărilor Lorentz.

**Compunerea vitezelor în mecanica relativistă.** Principiile relativității restrinse, a căror consecință directă a fost generalizarea în domeniul mecanicii a grupului transformărilor Lorentz, au produs schimbări asupra modului de a gândi al fizicienilor. Ele au avut o contribuție considerabilă în special în concepțiile moderne asupra energiei. Pentru a putea privi din acest punct de vedere problema energiei, este necesară studierea cu precădere a compunerii vitezelor, ținând seama de grupul de transformări Lorentz și a consecințelor ce decurg din el, referitoare la noțiunea de masă.

În acest scop vom considera sistemul de coordonate  $O'x'y'z't'$  (fig.4.7) și o rachetă ce se găsește în originea acestui sistem. Racheta se mișcă solidar cu sistemul res-

pectiv în direcția pozitivă a axei  $Ox$ , cu viteza  $v$ . Să presupunem că în interiorul rachetei un punct  $M$  se află în mișcare, avind în raport cu sistemul  $O'x'y'z't'$  viteza  $w'$  de proiecții  $w'_x$ ,  $w'_y$  și  $w'_z$  pe axele sistemului.

Să determinăm componentele  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  ale vitezei  $w$  în raport cu sistemul  $Oxyz$ , presupus fix.

Mișcarea sistemului  $O'x'y'z't'$  față de sistemul  $Oxyz$  este o translație cu viteza  $\vec{v}$  pe linia comună a axelor  $Ox$  și  $O'x'$ .

Derivind relațiile (4.31) ale lui Lorentz în raport cu timpul  $t$ , măsurat de un observator din sistemul  $Oxyz$ , care se mai numește și timpul său propriu, se obține

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dt'}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \frac{dt'}{dt}, \quad \frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Însă

$$\frac{dx}{dt} = w_x; \quad \frac{dy}{dt} = w_y; \quad \frac{dz}{dt} = w_z$$

și

$$\frac{dx'}{dt'} = w'_x; \quad \frac{dy'}{dt'} = w'_y; \quad \frac{dz'}{dt'} = w'_z.$$

Rezultă

$$w_x = \frac{w'_x + v}{1 + \frac{vw'_x}{c^2}}, \quad (4.32)$$

$$w_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vw'_x}{c^2}} w'_y, \quad (4.33)$$

$$w_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vw'_x}{c^2}} w'_z. \quad (4.34)$$

Relațiile (4.32), (4.33) și (4.34) arată că și în cazul limită, cind în sistemul  $O'x'y'z't'$  se emite un semnal luminos cu viteza  $w'_x = c$  (viteza luminii),  $w'_y = 0$ ,  $w'_z = 0$ , se obține

$$w_x = c, \quad w_y = 0, \quad w_z = 0,$$

care confirmă constanța vitezei luminii. Aceste relații arată că viteza relativă a unui mobil ce se deplasează față de un sistem inerțial, care, la rîndul lui, se deplasează față de un alt sistem, nu poate depăși față de acest sistem viteza luminii. Relațiile mai arată că în cazul în care  $v$  și  $w'_x$  sînt mici,  $\frac{vw'_x}{c^2}$  și  $\frac{v^2}{c^2}$  devin neglijabile, iar măsurarea vitezei se face în modul descris de cinematica clasică,

$$w_x = w'_x + v, \quad w_y = w'_y \text{ și } w_z = w'_z,$$

încît formulele mecanicii clasice devin un caz particular al mecanicii einsteiniene.

**Variația masei cu viteza în teoria relativității.** Faptul că nici un corp nu poate avea o viteză mai mare decît viteza luminii sugerează ideea că o dată cu creșterea vitezei lui, corpul trebuie să opună o rezistență din ce în ce mai mare oricărei tendințe de accelerare. Or, acest lucru înseamnă că masa trebuie să crească nelimitat cînd viteza lui tinde spre valoarea vitezei luminii. Reamintim că în mecanica nerelativistă masa unui corp este considerată o mărime constantă. Ca urmare, în mod logic, trebuie să ajungem la concluzia că dacă asupra unui corp acționează o forță finită, ce îi produce o accelerație, o dată cu variația vitezei apare și o variație a masei. În mod corespunzător, atunci cînd viteza corpului tinde să atingă viteza luminii, masa sa tinde spre infinit.

Rezultă de aici că masa unui corp nu este o constantă, ci o funcție crescătoare de viteză. După cum se știe, produsul  $m\vec{v} = \vec{H}$  se numește impuls, fiind un vector de aceeași orientare cu viteza  $\vec{v}$  a corpului de masă  $m$ . Admițînd



că în mecanica nerelativistă  $m = \text{const}$ , din formula impulsului, obținem

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}, \quad (4.35)$$

$\vec{F}$  fiind forța ce acționează asupra corpului.

Dacă avem un sistem izolat de corpuri care interacționează între ele prin forțe și presupunem că asupra unuia dintre aceste corpuri acționează un altul cu o forță  $\vec{F}_i$ , putem scrie

$$\vec{F}_i = \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i.$$

Însumând forțele ce acționează asupra întregului sistem, obținem

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Conform însă legii a treia a mecanicii, a lui Newton (a principiului acțiunii și reacțiunii), forțele interne  $\vec{F}_i$  ale sistemului care acționează între corpuri sînt două cîte două egale și de semne contrarii, deci

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \text{ de unde } \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = 0$$

sau

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

De aici rezultă principiul conservării impulsului, care se enunță astfel: într-un sistem izolat, suma geometrică a impulsurilor inițiale nu poate fi modificată de interacțiunile interne, rămînînd constantă în timp. Remarcabil este faptul că principiul conservării impulsului se deduce direct din cele trei legi ale lui Newton, fără să se mai introducă nici un fel de ipoteză suplimentară.

Pentru a găsi dependența masei de viteză, vom căuta să găsim o definiție a impulsului, care, pentru viteze mici în raport cu viteza luminii, să se reducă la expresia impulsului din mecanica nerelativistă  $\vec{H} = m_0 \vec{v}$ ,  $m_0$  fiind masa de repaus a corpului în sistemul de referință considerat. Pentru acest scop vom utiliza legea conservării impulsului, pe care

o vom generaliza în mecanica relativistă. Ținînd seama de cele arătate mai sus, vom analiza din punct de vedere relativist ciocnirea a două corpuri. În acest scop vom introduce cele două sisteme inerțiale descrise în figura 4.7, reduse însă numai la axele  $Oxy$  și  $O'x'y'$  (fig. 4.8), cel de al doilea

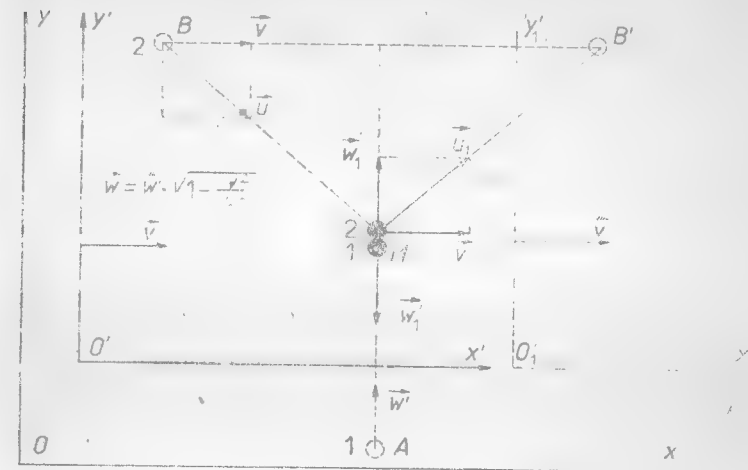


Fig. 4.8.

fiind în mișcare de translație, rectilinie și uniformă, avînd viteza  $\vec{v}$  îndreptată în direcția pozitivă a axei  $Ox$ . În fiecare sistem vom considera un observator, aruncînd fiecare în sistemul său, cu aceeași viteză  $w'$ , în direcție verticală, cîte o bilă identică, cel din sistemul  $Oxy$  în sus, iar cel din sistemul  $O'x'y'$  în jos, astfel încît ele să se întîlnească într-un punct  $M$ . Vom analiza procesul ciocnirii, pe care o vom considera elastică, din sistemul  $Oxy$ . Privite din acest sistem, traiectoriile celor două bile vor fi respectiv  $AMA$  și  $BMB'$ , iar  $O'_1x'_1y'_1$  reprezintă poziția axelor de coordonate  $O'x'y'$ , atunci cînd bila a doua ajunge în  $B'$  și prima bilă ajunge din nou în  $A$ , după ce ambele s-au ciocnit în  $M$ .

• Mișcarea primei bile, aruncată din  $A$ , desfășurîndu-se în sistemul de referință în care este analizat procesul ciocnirii, va avea loc de-a lungul dreptei  $AM$ , cu viteza  $\vec{w}'$ , cu care este aruncată.

• Mișcarea bilei a doua, aruncată din punctul  $B$ , ce se află în sistemul mobil  $O'x'y'$ , va fi funcție atît de viteza  $\vec{w}'$ ,

cu care a fost aruncată, cît și de viteza  $\vec{v}$ , de translație a sistemului, din a căror compunere rezultă viteza  $\vec{u}$ .

Deoarece mișcarea acestei bile este analizată de un observator din sistemul  $Oxy$ , viteza  $\vec{w}'$  a bilei aruncată din  $B$ , ce corespunde sistemului  $O'x'y'$ , trebuie să fie transformată în sistemul  $Oxy$  conform relației (4.33) în care se ține seama că  $w'_x = 0$ , încît obținem

$$w = w' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Deci  $\vec{u}$  va avea valoarea

$$u = \sqrt{v^2 + w'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \quad (4.36)$$

Considerînd că masele celor două bile în mișcare sînt funcții de viteza cu care se deplasează, vom nota cu  $m(w')$  masa primei bile și cu  $m(u)$  masa bilei a doua. Impulsul total înainte de ciocnirea celor două bile va fi egal cu suma vectorială

$$\vec{H}_1 = m(w') \vec{w}' + m(u) \vec{u}. \quad (4.37)$$

După ciocnire, vitezele celor două bile se modifică și anume, prima bilă se va reîntoarce spre punctul  $A$  cu viteza  $w'_1$ , iar bila a doua va urma drumul  $MB'$  cu viteza  $u_1$ , care rezultă din compunerea vitezelor  $w_1$  și  $v$ . Deoarece ciocnirea este elastică, mărimea acesteia din urmă nu este influențată de procesul de ciocnire, ea rămînînd deci tot timpul egală cu viteza relativă de translație a sistemului  $O'x'y'$  față de sistemul  $Oxy$ . Deci

$$u_1 = \sqrt{w_1'^2 + v^2}, \quad (4.38)$$

de unde rezultă impulsul total după ciocnirea elastică,

$$\vec{H}_2 = m(w'_1) \vec{w}'_1 + m(u_1) \vec{u}_1. \quad (4.39)$$

În conformitate cu principiul conservării impulsului, din (4.37) și (4.39) se obține

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_2 = \text{const}$$

sau

$$m(w') \vec{w}' + m(u) \vec{u} = m(w'_1) \vec{w}'_1 + m(u_1) \vec{u}_1. \quad (4.40)$$

Ținînd seama de proprietățile proiecției sumei vectoriale pe o direcție dată, proiectînd relația (4.40) pe di-

recția  $Ox$  și avînd în vedere, astfel cum s-a arătat, că  $\vec{v}$  este atît componenta lui  $\vec{u}$  cît și a lui  $\vec{u}_1$  după direcția  $Ox$ , putem scrie

$$m(u) v = m(u_1) v$$

sau

$$m(u) = m(u_1), \text{ de unde } u = u_1. \quad (4.41)$$

Avînd în vedere acest rezultat și ecuațiile (4.36) și (4.38), rezultă

$$\sqrt{v^2 + w'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{w_1'^2 + v^2}$$

și deci

$$w_1 = w' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.42)$$

care arată că bila a doua, după ciocnirea elastică, se reîntoarce spre  $B$  (privită de observatorul din sistemul  $Oxy$ ) cu aceeași viteză.

Aplicînd principiul conservării energiei cinetice, ciocnirii elastice, să scriem că sumele energiilor cinetice a celor două bile înainte și după ciocnire trebuie să fie egale. Se obține

$$\frac{m(w') w'^2}{2} + \frac{m(u) u^2}{2} = \frac{m(w'_1) w_1'^2}{2} + \frac{m(u_1) u_1^2}{2}.$$

Însă, conform cu (4.41),  $u = u_1$ , prin urmare și

$$m(w') w'^2 = m(w'_1) w_1'^2 \text{ sau } w' = w'_1. \quad (4.43)$$

ceea ce arată că și prima bilă trebuie să se reîntoarce în  $A$ , cu viteza pe care a avut-o înainte de ciocnire.

Proiectînd egalitatea vectorială (4.40) pe direcția transversală a deplasării  $O'x'y'$ , utilizînd și egalitățile de (4.43), (4.41) și (4.42), se obține

$$m(w') w' - m(u) w' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m(w') w' + m(u) w' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

care se reduce la

$$m(u) = \frac{m(w')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.44)$$

relație valabilă, oricare ar fi mărimea vitezelor  $v$  și  $w$ .

Dacă în sistemul de bile ce se ciocnesc vom face ca modulul vitezei  $\vec{w}'$  să tindă spre zero, masa primei bile va tinde spre valoarea masei sale în stare de repaus, pe care o vom nota cu  $m_0$ . Totodată, modulul vitezei  $\vec{u}$  a bilei a doua va tinde spre viteza relativă  $\vec{v}$ , de transport a sistemului  $O'x'y'$  față de sistemul  $Oxy$ , iar masa  $m$  a acestei bile are viteza relativă  $\vec{v}$  față de o bilă identică. Rezultă că atunci când  $\vec{w}'$  tinde spre zero, relația (4.44) se poate scrie sub forma

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.45)$$

Din această relație, care reprezintă dependența masei de viteză, rezultă că masa, ca măsură a inerției corpului, este cu atât mai mare cu cât viteza corpului este mai mare. De asemenea, pentru viteze mici în comparație cu viteza luminii, raportul  $v/c$  are valoare neglijabilă și obținem

$$m = m_0,$$

ceea ce arată că în cadrul mecanicii newtoniene putem considera masa corpurilor constantă.

Experiențele privind mișcarea unor particule cu sarcină electrică în câmpuri electrice sau magnetice, cu ajutorul cărora li se pot comunica viteze foarte mari, au arătat că o dată cu creșterea vitezei particulelor crește și masa lor, în concordanță cu relația (4.45).

Cu formula (4.45) putem calcula masa unei particule care se mișcă cu viteza  $v$ , dacă  $v \neq c$ , atunci când îi cunoaștem masa de repaus  $m_0$ . Formula arată că nu este posibil să accelerăm particule oricât de mici ar fi masele lor de repaus, pînă la viteza luminii, deoarece în apropierea acestei viteze, masele lor tinzînd spre infinit, forțele necesare accelerării, va trebui ca la rîndul lor să fie infinite. În schimb însă, putem afirma cu toată convingerea că dacă masa unei particule este egală cu zero în stare de repaus, ea poate atinge viteza luminii. Din această categorie fac parte fotonii sau cuantele de lumină. În schimb însă, dacă o particulă are viteza  $c$ , aceasta fiind invariantă, rezultă că nu există pentru astfel de particule un referențial față de care să se afle în repaus, adică pentru astfel de particule nu are sens conceptul de masă de repaus. Și de aici rezultă, formal,  $m_0 = 0$ .

Ajungem astfel la o concluzie foarte importantă: toate particulele elementare existente în natură, se împart în două categorii: particule cu masă de repaus nulă și particule cu masă de repaus diferită de zero.

Se pune însă întrebarea: poate oare o particulă dintr-o categorie să se transforme într-o particulă din cealaltă categorie? Se admite, de exemplu, că un electron ciocnindu-se de un pozitron, ambele particule încetează de a mai exista, punînd în același timp în libertate doi fotoni de mare energie. Acestui fenomen i se mai spune uneori impropriu „anihilare”, adică distrugerea materiei. Se înțelege că nu se întîmplă nici un fel de distrugere, ci numai transformarea unor particule cu masă de repaus în particule fără masă de repaus.

**Expresia energiei în teoria relativității.** Pentru calculul expresiei energiei în teoria relativității, vom proceda în același fel ca în 4.2.2, cînd am calculat transformarea lucrului mecanic transmis de o forță asupra unui corp în energie cinetică. De această dată vom ține seama că masa corpului crește o dată cu viteza corpului, conform relației (4.45). În acest scop, vom scrie lucrul mecanic elementar sub forma produsului scalar dintre forța  $\vec{F}$ , care acționează asupra unui corp liber de masă  $m$ , asimilat cu un punct material, și deplasarea sa  $d\vec{s}$ ,

$$dW = \vec{F} d\vec{s}.$$

Notînd cu  $\vec{v}$  viteza corpului, conform relației (4.35) putem scrie

$$dW = d(m\vec{v}) \frac{d\vec{s}}{dt} = d(m\vec{v}) \vec{v} = (\vec{v}dm + m d\vec{v}) \vec{v}$$

sau

$$dW = m\vec{v}d\vec{v} + \vec{v}^2 dm = \frac{m}{2} d(\vec{v}^2) + \vec{v}^2 dm.$$

Știînd însă că produsul scalar al unui vector prin el însuși este egal cu pătratul modulului său, obținem

$$dW = \frac{m}{2} d(v^2) + v^2 dm. \quad (4.46)$$

În mecanica nerelativistă, masa unui corp fiind considerată invariantă,  $dm = 0$ , relația precedentă se reduce la

$$dW = \frac{m}{2} d(v^2)$$

și astfel lucrul mecanic efectuat de o forță  $\vec{F}$ , ce acționează asupra unui punct material de-a lungul unei traiectorii oarecare, este

$$W = \frac{m}{2} \int d(v^2) = \frac{mv^2}{2} + C.$$

Dacă forța începe să acționeze asupra corpului când acesta se află în repaus, atunci pentru  $v = 0$ ,  $W = 0$  și deci  $C = 0$  și vom putea scrie

$$W = \frac{1}{2} mv^2,$$

aceasta fiind expresia lucrului mecanic, necesar pentru a scoate un punct material de masă  $m$  din starea de repaus și a-i comunica viteza  $\vec{v}$ .

Relația (4.45), care arată modul în care masa variază cu viteza, se mai poate scrie sub forma

$$m_0^2 c^2 = m^2 c^2 - m^2 v^2,$$

din a cărei diferențiere obținem

$$2c^2 m dm - 2mv^2 dm - 2m^2 v dv = 0,$$

de unde

$$c^2 dm = c^2 dm - \frac{m}{v} d(v^2).$$

Să introducem ultima relație în (4.46) și să ținem seama că  $dW$  este egal cu energia  $dW$  transmisă punctului material de masă  $m$ . Vom putea scrie

$$dW = c^2 dm$$

și, prin integrare,

$$W = mc^2 + C.$$

Pentru  $m = 0$ , deoarece atât lucrul mecanic, cât și energia nu pot exista fără masă (în afara materiei), rezultă imediat că  $C = 0$  și, ținând seama de (4.45), putem scrie

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 (1 - \alpha^2)^{-1/2},$$

în care am notat  $\alpha = \frac{v}{c}$ . Prin dezvoltare în serie, conform formulei binomului lui Newton, obținem

$$W = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^4 + \dots \right)$$

sau, având în vedere valoarea lui  $\alpha$ , obținem

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Folosind numai primii doi termeni ai dezvoltării în serie, rezultă

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2,$$

relație ce arată că energia unui corp în mișcare rezultă din adunarea energiei sale cinetice,  $\frac{1}{2} m_0 v^2$ , și o energie ce se obține din produsul dintre masa sa de repaus și pătratul vitezei luminii,  $m_0 c^2$ , care reprezintă energia masei de repaus a corpului. Această ultimă energie se mai numește și energia sa proprie.

Relația

$$W_0 = m_0 c^2 \quad (4.47)$$

este celebra ecuație a lui Einstein, considerată adeseori drept cea mai importantă formulă a teoriei relativității și care este o relație fundamentală în fizica nucleară. Ea arată că materia constituie un uriaș izvor de energie.

Conform acestei formule, energia corespunzătoare unui kilogram de substanță este

$$W_0 = 1 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ J}.$$

Pentru a ne da mai bine seama de însemnătatea acestei energii, o vom compara cu cea obținută prin arderea petrolului. Dacă vom socoti 42 MJ/kg puterea calorică a petrolului, această cantitate de energie este echivalentă cu aceea obținută prin arderea a  $9 \cdot 10^{16} / 42 \cdot 10^6 \simeq 2 \cdot 10^9$  kilograme de petrol.

Este greșită interpretarea ce se dă uneori formulei (4.47) că ea ar reprezenta transformarea materiei în energie. Singura interpretare corectă a relației (4.47) este următoarea: sistemul fizic într-o stare dată se caracterizează

prin mărimile de stare  $m$  și  $W$ . Între aceste mărimi există relația  $W = mc^2$  și, în consecință, între variabilele lor există relația

$$\Delta W = c^2 \Delta m. \quad (4.18)$$

Această formulă se referă la procesele de trecere a materiei de la o stare la alta, materia prezentându-se în natură sub forme variate: substanță (sub formele ei de agregare solidă, lichidă, gazoasă) plasmă, radiații etc. căroră, potrivit teoriei relativității trebuie să le atribuim o masă inertă.

Transformările substanței la nivel molecular, cum sînt acelea care se produc în reacțiile chimice, pun în libertate cantități prea mici de energie, pentru ca prin mijloacele de măsurare de care dispunem, să putem determina masa inertă, corespunzătoare energiei puse în libertate sau absorbită sub diferite forme. Astfel, masa inertă corespunzătoare energiei obținute la arderea unui kg de petrol, prin care se pun în libertate 42 MJ, este

$$\frac{42 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^{16}} \simeq 47 \cdot 10^{-11} \text{ kg} = 47 \cdot 10^{-8} \text{ g},$$

adică 0,47 milionimi de gram, prea mică pentru a putea fi măsurată.

Formula lui Einstein este importantă, deoarece sintetizează într-o formă unică cele două legi cunoscute, a conservării masei și a conservării energiei, care erau considerate ca legi separate. Într-adevăr, legea conservării masei, descoperită de Lavoisier și care arată că masa unei substanțe compuse este egală cu suma maselor componentelor ce intră în compunerea ei, este numai aproximativă. Conform teoriei relativității, masa dinamică se conservă riguros, relația (4.18) arătînd că orice variație a energiei unui sistem antrenează și o variație a masei sistemului, egală cu cîtu de variația energiei și pătratul vitezei luminii. Această variație a masei reprezintă masa corespunzătoare energiei radiante. Astfel, din combinarea a 2 grame de hidrogen și 16 grame de oxigen nu obținem exact 18 grame de apă, pentru că această reacție chimică este însoțită de degajarea unei cantități de căldură egală cu 286 kJ, care antrenează o variație a masei, egală cu

$$\Delta m = \frac{286 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{16}} \simeq 3 \cdot 10^{-12} \text{ kg} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ g}.$$

Variația masei, astfel calculată, ne arată totuși că legea conservării masei, a lui Lavoisier, poate fi considerată ca o bună aproximație a realității.

Situația se schimbă radical în cazul reacțiilor în care raportul dintre energia schimbată cu mediul exterior și masa substanțelor ce intră în reacție devine foarte mare, cum este cazul reacțiilor nucleare sau acelea dintre particulele elementare, mai bine zis, atunci cînd se trece de la nivelul macroscopic sau molecular la cel microscopic sau atomic.

Pentru a exemplifica, vom considera reacția de fisiune a izotopului 235 al uraniului, folosită în reactorii nucleari. Se știe că dacă nucleul acestui izotop al uraniului este lovit de un neutron venit din exterior, el fisionează aproape imediat, în circa  $10^{-13} - 10^{-14}$  secunde, în două fragmente aproape egale, emițînd totodată neutroni și radiații gamma foarte penetrante. Dacă se face suma maselor neutronilor și a fragmentelor rezultate din fisiune, se găsește că acest proces nuclear s-a desfășurat cu o variație a masei (defect de masă), egală aproximativ cu 0,225 unități atomice de masă. Rezultă că prin fisiunea unui gram de uraniu cu masa atomică 235 se produce o variație a masei

$$\Delta m = \frac{0,225}{235} \simeq 96 \cdot 10^{-5} \text{ g} = 96 \cdot 10^{-8} \text{ kg}.$$

Această masă se „transformă”, în timpul reacției nucleare, în energie și, conform relației (4.47), rezultă că prin fisiunea unui gram din izotopul 235 al uraniului, trebuie să se producă o energie egală cu

$$W = mc^2 = 96 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 864 \cdot 10^8 \text{ J},$$

care corespunde unei călduri rezultate din arderea a

$$864 \cdot 10^8 / 42 \cdot 10^6 \simeq 2057 \text{ kg} \approx 2 \text{ t petrol}.$$

Se constată experimental că această energie se regăsește: 4% în radiațiile emise în timpul fisiunii, 16% în emisiunile radioactive a fragmentelor produse prin fisiune, iar restul de 80% reprezintă energia cinetică a înseși acestor fragmente, care, fiind proiectate cu o viteză considerabilă, ciocnesc atomii vecini, transformîndu-și energia lor cinetică în căldură. Această căldură este în cele din urmă exploatată în reactorii nucleari.

## Capitolul 5. MODELUL CÂMPURILOR FIZICE POTENȚIALE PLANE

„Dacă, înainte de a începe munca, ar trebui mai întâi să găsești căile de înălțurare a tuturor piedicilor posibile, care ar putea fi întâlnite în timpul înfăptuirii sale, atunci nici o muncă nu ar mai fi începută.”

Samuel JOHNSON

### 5.1. Câmp fizic de forțe. Generalități

Prin câmp se înțeleg două noțiuni distincte :

a. O formă de materie prin care se transmit interacțiunile dintre sisteme, de exemplu : câmp gravitic, câmp electromagnetic, câmp nuclear, câmp mezonice etc.

b. Mulțimea nenumărabilă a valorilor pe care le poate lua, într-un domeniu dat, o mărime dependentă de  $x, y, z$  și  $t$ . Un astfel de câmp poate fi scalar, vectorial... după tipul mărimii fizice : câmp de temperatură, câmp de viteze, câmp de forțe, câmp de inducție electrică, respectiv magnetică ș.a.m.d.

Câmpul vectorial, a cărui stare locală și instantanee este caracterizată de forțe care acționează asupra punctelor materiale, se numește *câmp de forțe*. De exemplu, un punct material aflat sub acțiunea gravitației se găsește într-un câmp gravitic. Un corp ce posedă sarcini electrice și care este atras sau respins de alte corpuri încărcate cu electricitate se găsește într-un câmp de forțe electrostatice etc.

Forța  $\vec{F}$  cu care acționează câmpul asupra punctului material (numită uneori funcție de punct) este determinată, dacă se cunosc cele trei componente  $X, Y, Z$  ale forței în funcție de coordonatele  $x, y, z, t$  ale punctului său de aplicație și de timp. Când mărimea acestor forțe nu depinde de timp, ci numai de poziție, se spune că punctul sau corpul material se află sau se mișcă într-un câmp invariabil de forțe.

Pentru a studia câmpurile fizice, vom lua ca exemplu câmpul electric, rezultatele generalizându-le apoi în alte domenii ale fizicii. În acest scop vom rezuma mai jos unele definiții și proprietăți ale câmpului electric.

Câmpul electric este câmpul vectorial purtător material al interacțiunilor dintre sarcinile electrice, fiind caracterizat în fiecare punct de intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$ . Câmpul electric poate fi studiat introducând în câmp un mic corp de probă încărcat cu o sarcină electrică punctiformă  $q$ , care să nu modifice distribuția de sarcină a câmpului.

Se numește intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  limita raportului dintre forța  $\vec{F}$  care acționează asupra sarcinii electrice  $q$  a corpului de probă aflat în vid și sarcina respectivă,

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}.$$

Procesul de trecere la limită are sens fizic (experimental) numai dacă se admite ipoteza continuității sarcinii electrice și a materiei, în sensul că acestea se pot diviza oricât de mult. Această ipoteză este fundamentală pentru întreaga teorie microscopică (fenomenologică) a interacțiunilor electromagnetice.

Se numește linie de câmp curba a cărei tangentă în orice punct are direcția vectorului  $\vec{E}$ , intensitate a câmpului. Dacă se așază în spațiu o curbă închisă și prin fiecare dintre punctele ei vom duce linia de câmp corespunzătoare, vom obține ceea ce se numește un tub de linii de câmp (fig. 5.1).



Fig. 5.1.

Considerăm într-un câmp electric o suprafață închisă  $S$ . Fluxul ce trece prin elementul  $dA$  al suprafeței  $S$  este dat de expresia

$$d\psi = E dA \cos \alpha,$$



$\alpha$  fiind unghiul făcut de direcția normalei la suprafață cu direcția forței. Elementul de suprafață  $dA$  se poate asimila cu un vector care are o mărime egală cu aria sa, iar ca direcție și sens, normala la suprafață. În acest fel, fluxul ce trece prin aria elementară  $dA$  se exprimă prin produsul scalar

$$d\psi = \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Fluxul total ce trece prin întreaga suprafață  $S$  va fi

$$\psi = \oint_S \vec{E} d\vec{A}.$$

În electrostatică se demonstrează teorema lui Gauss, care se enunță astfel: fluxul de forță ce străbate o suprafață închisă de formă oarecare este egal cu

$$\psi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon},$$

$Q$  fiind sarcina electrică cuprinsă în interiorul suprafeței, iar  $\epsilon$  permitivitatea absolută a mediului, presupus omogen, liniar și izotrop. Pentru un mediu oarecare, în cazul în care sarcina electrică se află în interiorul suprafeței închise, teorema lui Gauss se scrie

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = Q,$$

unde  $\vec{D}$  este vectorul inducție electrică.

O aplicație a teoremei lui Gauss este teorema lui Coulomb, care demonstrează că printr-un punct exterior, din apropierea suprafeței unui conductor în echilibru electrostatic, câmpul electric are valoarea

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

De asemenea, se mai demonstrează că presiunea electrostatică a unui conductor este

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon}.$$

Aceste relații sînt exprimate în sistemul internațional de unități, în care  $\vec{E}$  intensitatea cîmpului — se măsoară în V/m,  $\psi$  — fluxul electric — se măsoară în coulombi,  $Q$  — sarcina electrică — se măsoară în coulombi,  $\sigma$  — densitatea superficială de sarcină — se măsoară în C/m<sup>2</sup>,  $\epsilon$  — permitivitate absolută a mediului — se măsoară în F/m.

O altă aplicație a teoremei lui Gauss o reprezintă teorema elementelor corespondente. Se numesc elemente corespondente elementele de suprafață  $dA$  și  $dA'$ , delimitate pe doi conductori  $M$  și  $N$ , de un tub de linii de cîmp foarte îngust (fig. 5.2). Conform teoremei menționate, sarcinile elementelor corespunzătoare sînt egale și de semn contrar.

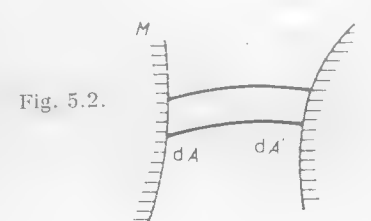


Fig. 5.2.

În 4.2.4 am arătat cum se calculează lucrul mecanic necesar pentru a deplasa un corp încărcat cu sarcină electrică atunci cînd se găsește sub acțiunea altor sarcini electrice fixe, sarcina aflîndu-se deci într-un cîmp de forțe electrostatice. Am mai arătat că acest lucru mecanic nu depinde de forma drumului parcurs, ci numai de poziția inițială și finală a sarcinii în mișcare.

Am definit că potențialul cîmpului electrostatic produs de o sarcină punctiformă  $Q$  într-un punct  $M$ , ce se găsește la distanța  $r$  de sarcină, este exprimat în SI prin

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} + \text{const},$$

unde constanta aditivă este arbitrară. Făcînd convenția  $V(\infty) = 0$ , rezultă  $\text{const} = 0$  și deci, potențialul dintr-un punct al cîmpului, produs de sarcina  $Q$ , se scrie

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r}.$$

Dacă  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$  și  $r_1, r_2, r_3 \dots$  sînt sarcinile electrice, respectiv distanțele pînă la un punct  $M$  al cîmpului produs de aceste sarcini, atunci potențialul în acel punct este

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \quad (5.1)$$

În cazul unor sarcini distribuite continuu în volum sau pe suprafețe,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{dQ}{r} \quad \text{sau} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{dQ}{r}$$

Raportînd tot sistemul de sarcini electrice la un sistem  $Oxyz$  de coordonate (fig. 5.3) și notînd cu  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  coor-

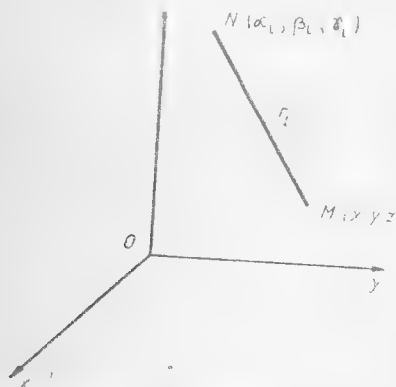


Fig. 5.3.

donatele sarcinilor electrice  $Q_i$  și cu  $x, y, z$  coordonatele punctului  $M$ , distanța  $r_i$  de la sistemul de sarcini electrice la punctul  $M$  se poate scrie

$$r_i^2 = (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 + (z - \gamma_i)^2,$$

de unde

$$\frac{\partial r_i^2}{\partial x} = 2r_i \frac{\partial r_i}{\partial x} = 2(x - \alpha_i) \quad \text{sau} \quad \frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{x - \alpha_i}{r_i}.$$

Pe de altă parte, din relația (5.1)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q_i}{r_i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \frac{\partial r_i}{\partial x}$$

sau

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum \frac{Q_i}{r_i^2} \frac{x - \alpha_i}{r_i}.$$

Num însă  $\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_i}{r_i^2}$  este egală cu cîmpul  $E_i$  cu care o sarcină  $Q_i$  acționează asupra unității de sarcină aflată în punctul  $M$ , iar  $\frac{x - \alpha_i}{r_i}$  este cosinusul director făcut de direcția cîmpului cu direcția axei  $Ox$ , se obține

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\sum_{i=1}^n E_{xi} = -E_x;$$

$E_{xi}$  este proiecția cîmpului  $\vec{E}_i$  pe axa  $Ox$ , iar  $E_x$  este suma proiecțiilor pe axa  $Ox$  a cîmpurilor cu care acționează totalitatea sarcinilor asupra unității de sarcină aflată în punctul  $M$ . Valoarea lui  $E_x$  este egală deci cu proiecția intensității cîmpului din punctul  $M$ , pe axa  $Ox$ . În același mod obținem

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y \quad \text{și} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -E_z.$$

Punctele dintr-un cîmp electric care au același potențial se găsesc pe o suprafață  $V(x, y, z) = \text{const}$ , numită suprafață echipotențială. Am văzut în 4.2.4 că suprafețele conductorilor încărcati cu electricitate sînt și ele echipotențiale.

Se constată că  $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$  sînt cosinuşii direcțiilor ai normalei într-un punct oarecare  $(x, y, z)$  la suprafața echipotențială  $V(x, y, z) = \text{const}$ .

Deoarece însă, cîmpul electric

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

are componentele egale cu

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (5.2)$$

înseamnă că tangenta la liniile de cîmp, în punctele în care acestea întîlnesc suprafața echipotențială, au aceeași

direcție cu normala la suprafața echipotențială; liniile de cimp și suprafețele echipotențiale sînt deci ortogonale.

Din cele arătate rezultă că dacă se cunoaște potențialul într-un punct, se poate calcula cu ușurință mărimea cîmpului electric în acel punct. Acest fel de calcul prezintă un mare avantaj, deoarece, datorită unei distribuții oarecare de sarcini, potențialele se adună algebric, în timp ce forțele și intensitatea cîmpului, fiind mărimi vectoriale, nu se pot însuma decît vectorial.

Să aplicăm teorema lui Gauss pentru suprafața ce delimitează volumul elementar ( $dx, dy, dz$ ) care nu conține sarcini electrice (fig. 5.4); fluxul ce iese din această suprafață va fi prin urmare nul.

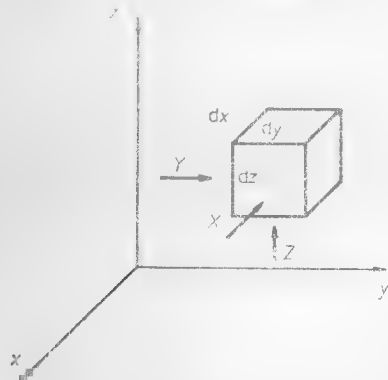


Fig. 5.4.

Vom nota cele trei componente ale cîmpului după cele trei axe  $E_x, E_y, E_z$  și ținem seama că fluxul ce intră într-un volum este negativ. Putem scrie

$$-E_x dy dz - E_y dx dz - E_z dx dy = \psi_1.$$

Deoarece componentele cîmpului la ieșirea din volumul ( $dx dy dz$ ) sînt

$$E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx; E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy; E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz,$$

fluxul (pozitiv) ce iese din volumul respectiv este

$$\begin{aligned} &\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\right) dy dz + \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy\right) dx dz + \\ &+ \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz\right) dx dy = \psi_2. \end{aligned}$$

Însumind expresiile corespunzătoare pentru  $\psi_1$  și  $\psi_2$ , obținem fluxul ce străbate suprafața volumului ( $dx dy dz$ ), care, conform teoremei lui Gauss, trebuie să fie nul, deoarece volumul considerat nu conține sarcini electrice,

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dx dy dz = 0$$

sau

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

expresie care poartă numele de divergență. Înlocuind  $E_x, E_y, E_z$  cu valorile din (5.2), se obține expresia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (5.3)$$

numită ecuația lui Laplace. Cîmpurile fizice care satisfac această ecuație se mai numesc cîmpuri laplaceiene, cîmpuri potențiale sau cîmpuri de divergență nulă.

Din cele arătate, problema determinării cîmpului electrostatic este simplă, cînd se cunoaște distribuția sarcinilor, căci ea se reduce în cele din urmă la calculul unor integrale. Cînd într-un cîmp electrostatic se introduc conductori, problema devine foarte complicată, deoarece trebuie să se determine distribuția acestor sarcini astfel ca suprafața conductorilor să fie echipotențială. Problemele cele mai simple de această natură sînt acelea în care funcția potențială  $V$  satisface, în orice punct din exteriorul conductorilor, relația (5.3) a lui Laplace, care se mai scrie, în formalismul analizei vectoriale, astfel

$$\nabla^2 V = 0.$$

După cum s-a arătat, suprafețele echipotențiale sînt în orice punct din spațiu normale la vectorul intensitate a cîmpului  $\vec{E}$ . Se demonstrează că nu există decît o singură funcție  $V$  care să satisfacă ecuația lui Laplace și care să aibă valori date pe un număr de conductori în repaus, impunîndu-se totodată și condiția de a avea un potențial cunoscut pe unul dintre conductorii ce închide sistemul sau, în lipsa acestuia, condiția ca la infinit  $V \rightarrow 0$ .

Din acest motiv, atunci cînd pe o cale particulară se obține soluția unei probleme de fizică de această natură

și care satisface condițiile precedente, soluția trebuie considerată unică și definitivă, oricare au fost mijloacele folosite pentru a o rezolva.

Astfel de probleme, în care se cere rezolvarea unei ecuații diferențiale cu anumite condiții de frontieră, se numesc probleme cu valori limită. Ele au format, de-a lungul timpului, obiectul multor studii matematice, care au arătat că în cazul conductorilor cu forme complicate, nu există metode analitice generale, pentru găsirea soluțiilor.

În legătură cu suprafețele echipotențiale există o teoremă care pune în evidență legătura dintre sarcinile electrice de pe suprafață și structura cîmpului creat de acestea: putem materializa orice suprafață echipotențială printr-o suprafață conductoare, lăsînd să se răspîndească pe ea sarcinile interioare, fără ca structura cîmpului exterior să se schimbe.

## 5.2. Proprietățile cîmpurilor vectoriale plane. Introducere matematică

Există situații, în aparență foarte particulare, dar cu multe aplicații în practică, în care variațiile cîmpurilor fizice într-o direcție a axelor de coordonate sînt egale cu zero sau pot fi neglijate în comparație cu variațiile pe celelalte două direcții. Deoarece în astfel de probleme intensitatea cîmpului depinde numai de două coordonate, de exemplu,  $x$  și  $y$ , ele se numesc bidimensionale, iar  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ , încît ecuația lui Laplace se reduce la

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (5.4)$$

Cîmpul definit de o astfel de ecuație se numește cîmp plan, deoarece vectorul intensitate a cîmpului  $\vec{E}$ , fiind independent de  $z$ , păstrează aceeași mărime, direcție și sens cînd punctul său de aplicație se deplasează după normala la planul  $Oxy$ . Cîmpul este definit deci prin două componente  $E_x$  și  $E_y$ . Evident, suprafețele echipotențiale ale cîmpurilor plane vor fi suprafețe cilindrice avînd, în acest

caz, generatoarele paralele cu axa  $Oz$ . Intersecțiile acestor suprafețe cu planul  $Oxy$  formează o familie de curbe echipotențiale, a căror ecuație  $V(xy) = C$  este o soluție a ecuației (5.4) a lui Laplace,  $C$  fiind o constantă arbitrară.

De remarcat că, în mod practic, asemenea probleme nu pot interveni atîta timp cît conductorii au dimensiuni finite. Cu toate acestea, există numeroase cazuri importante în care lungimea conductorilor cilindrici este cu mult mai mare decît domeniul considerat, încît efectul capetelor este neglijabil și problema devine bidimensională. Ecuația lui Laplace în plan constituie modelul matematic al cîmpurilor potențiale plane, asupra cărora vom face un studiu introductiv în acest capitol. Inițial, pentru concretizare, ne vom menține, ca și pînă acum, tot la modelul cîmpului electrostatic.

În cazul particular al cîmpurilor potențiale plane, putem asocia funcției potențiale  $V(xy)$  — soluție a ecuației lui Laplace — o funcție flux conjugată acesteia și care să îndeplinească condițiile

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.5)$$

Ținînd seama de (5.2), avem

$$-E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{și} \quad -E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.6)$$

Această funcție  $\psi = C'$  ( $C'$  fiind o constantă arbitrară) se poate determina în virtutea condițiilor (5.6), de mai sus, prin calculul unei integrale, dacă se cunoaște funcția  $V$  care trebuie să satisfacă ecuația lui Laplace (ca exemplu, v. (5.16)).

Funcțiile  $V$  și  $\psi$ , legate prin relațiile (5.5), se numesc funcții conjugate; ele se bucură de proprietăți fundamentale în studiul cîmpurilor plane, deoarece se pot schimba între ele, schimbînd semnul, putînd alege pe oricare funcție potențial, iar pe cealaltă, funcție flux.

Dacă derivăm prima dintre relațiile (5.6) în raport cu  $x$  și a doua în raport cu  $y$ ; obținem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

și deci

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Procedind în același mod, obținem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Prin urmare, funcțiile  $V$  și  $\psi$  satisfac ecuațiile lui Laplace.

Aceleași condiții (5.5) exprimate în coordonate polare au forma

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (5.7)$$

în timp ce ecuația lui Laplace în coordonate polare plane, în cazul câmpurilor potențiale, are expresia următoare:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5.8)$$

Cele două familii de curbe  $V(x, y) = C$  și  $\psi(x, y) = C'$  sînt ortogonale. Într-adevăr, coeficienții unghiulari ai tangentelor în același punct ai curbelor  $C$  și  $C'$  sînt, respectiv

$$\frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{și} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} : \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Conform relațiilor fundamentale (5.5), această ultimă expresie este egală cu

$$\frac{\partial V}{\partial x} : -\frac{\partial V}{\partial y},$$

produsul acestor coeficienți fiind deci egal cu  $-1$ , ceea ce arată că unghiurile după care se intersectează cele două familii de curbe sînt drepte. Mai rezultă că familia de curbe ce reprezintă grafic funcția de flux corespunde, în cazul câmpului electrostatic, liniilor de cîmp.

Reprezentarea câmpurilor prin familiile de curbe de potențial constant  $V(x, y) = C$  și de flux  $\psi(x, y) = C'$ , permite calcularea în orice punct, pe cale grafică, a intensității câmpului. Pentru aceasta vom da lui  $V$  un număr oarecare de valori, în progresie aritmetică. Fiecărei valori a lui  $V$  îi va corespunde în plan o curbă bine determinată. Vom da apoi lui  $\psi$ , de asemenea, un număr de valori, tot în progresie aritmetică, cu aceeași rație, cărora le vor co-

respunde alte curbe. Ambele familii de curbe vor forma o rețea de curbe ce se întretaie — după cum s-a arătat — ortogonal.

Vom considera un ochi elementar (fig. 5.5) al acestei rețele și ne propunem să calculăm mărimea unei laturi a unui asemenea ochi, care la limită este egal cu  $AB =$

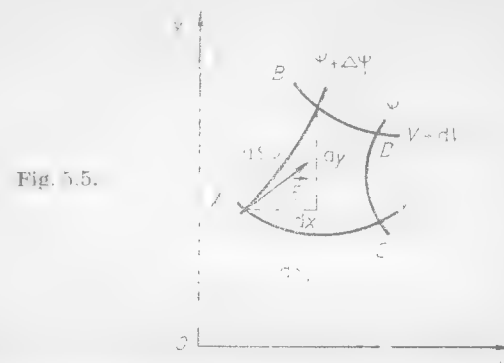


Fig. 5.5.

$= CD = ds_\psi$ . Această latură se găsește pe curba  $\psi = \text{const}$  și este cuprinsă între două curbe echipotențiale  $V$  și  $V + dV$ . Lungimea ei este

$$ds_\psi = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Într-un punct oarecare al câmpului în care  $\psi(x, y)$  are o valoare dată  $\psi(x, y) = \text{const}$ , valorile lui  $dx$  și  $dy$  se obțin prin rezolvarea următorului sistem de ecuații:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy,$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0.$$

Ținând seama că  $V(x, y)$  și  $\psi(x, y)$  sînt funcții conjugate și introducînd în relația precedentă valorile lui  $dx$  și  $dy$ , obținem

$$ds_\psi = \frac{dV}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2}} = \frac{dV}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} = \frac{dV}{E}$$

sau

$$\vec{E} = \frac{dV}{ds_\psi} = \frac{\Delta V}{\Delta s_\psi}$$

Prin urmare, avind trasată o rețea de curbe echipotențiale și de flux, dacă cunoaștem diferența de potențial  $\Delta V$  dintre două linii echipotențiale vecine — în cazul nostru ea este egală cu rația progresiei aritmetice folosită la trasarea curbelor  $V(x, y) = \text{const}$  — precum și distanța liniară  $\Delta s_\psi$  dintre ele, putem obține în punctul considerat, cu aproximația dorită, valoarea  $\vec{E}$  a vectorului intensitate a cîmpului. Direcția lui  $\vec{E}$  este în acel punct normală la linia echipotențială, iar sensul, acela al creșterii potențialului. Așa cum se va vedea mai departe, tot astfel se poate calcula și densitatea de curent în cazul electrocineticii.

Calculînd în același fel elementul de arc  $AC = ds_r$ , cuprins între curbele corespunzătoare liniilor de flux  $\psi$  și  $\psi + d\psi$ , pe linia echipotențială  $V(x, y) = C$ , obținem

$$ds_r = \frac{d\psi}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2}}$$

Cum, prin ipoteză, pentru a reprezenta pe  $V(x, y) = C$  și  $\psi(x, y) = C'$ , am ales valorile lui  $C$  și  $C'$  în progresie aritmetică, cu aceeași rație, avem  $dV = d\psi$ , de unde rezultă că și  $ds_r = ds_\psi$ . Prin urmare, ochiul de rețea  $ABCD$  poate fi aproximat cu un pătrat, în condițiile în care  $\Delta V \rightarrow 0$  și  $\Delta \psi \rightarrow 0$ .

Reprezentarea familiilor de curbe  $V(x, y) = C$  și  $\psi(x, y) = C'$  are o mare importanță, intrucît oferă posibilitatea calculării pe cale grafică a intensității cîmpului electric, foarte greu, dacă nu chiar imposibil de obținut pe cale analitică.

Dacă se formează funcția de variabilă complexă

$$Z = f(z) = V + i\psi$$

$V$  și  $\psi$  fiind funcții conjugate, se obține o funcție analitică de variabilă complexă. Reamintim că proprietatea fundamentală a unei funcții analitice  $f(z)$  este aceea de a admite derivată în orice punct al unui domeniu.

După cum se știe, spunem că  $f(z)$  este funcție de variabilă complexă

$$z = x + iy, \quad (5.9)$$

definită într-un domeniu  $D$ , dacă unei valori a lui  $z$  din acest domeniu îi corespunde o valoare a lui  $f(z)$ ;  $z$  se numește variabilă independentă, iar  $D$  domeniul funcției.

Variabilele complexe se reprezintă în planul complex. În acest scop se aleg două axe dreptunghiulare (fig. 5.6) și o unitate de măsură. Convenim ca variabilei complexe  $z$  să-i corespundă punctul  $M$ , avind coordonatele  $x$  și  $y$ .

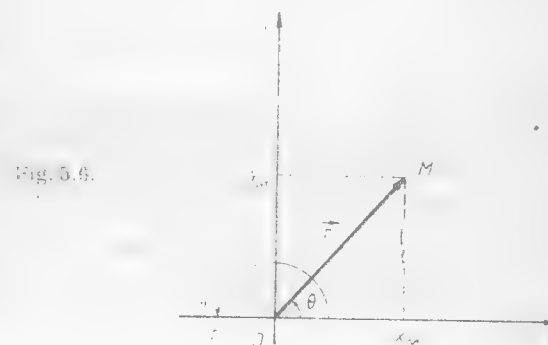


Fig. 5.6.

Punctul  $M(x, y)$  se numește imaginea geometrică a numărului complex  $z = x + iy$ , iar numărul complex  $z$  se numește afixul punctului  $M$ . Variabilele  $x$  și  $y$  se numesc respectiv, partea reală și partea imaginară a lui  $z$ . Planul  $Oxy$  se numește planul complex al variabilei  $z$ . Axa  $Ox$  se numește axa reală, iar  $Oy$ , axa numerelor imaginare. Distanța  $OM$  se numește modulul lui  $z$  și se notează  $|z|$ . r. Avem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Unghiul pe care-l face semiaxa  $Ox$  cu semidreapta  $OM$ , socotit ca în trigonometrie, se numește argumentul lui  $z$ . Un număr complex nu se schimbă dacă-i mărim argumentul cu un multiplu de  $2\pi$ . Numim argument principal al numărului  $z$ , unghiul  $\theta$  pentru care

$$\theta \in [-\pi, \pi].$$



Notind cu  $r$  modulul și cu  $\theta$  argumentul numărului complex  $z$ , putem scrie

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

relații ce ne permit să calculăm pe  $r$  și  $\theta$  în funcție de  $x$  și  $y$  sau invers. Zero și infinitul unui număr complex au modulele, respectiv 0 și  $\infty$ , iar argumentele nedeterminate.

Ținând seama de (5.9), un număr complex se poate scrie și sub forma trigonometrică,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Utilizind formula lui Euler,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , putem scrie

$$z = r e^{i\theta}. \quad (5.10)$$

Această relație ne permite să găsim expresia complexă a logaritmilor numerelor negative.

În planul complex, un număr negativ  $-n$  se reprezintă pe semi-axa negativă  $Ox'$  (fig. 5.6). El are modulul egal cu  $n$ , iar argumentul cu  $\pi$ , deci

$$\ln(-n) = \ln n e^{i\pi} = \ln n + i\pi.$$

Dacă numărul negativ este  $-1$ , obținem

$$\ln(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi,$$

deoarece  $\ln 1 = 0$ .

Am arătat mai sus cum se formează o funcție de variabilă complexă (analitică), folosind două funcții conjugate  $V$  și  $\psi$ . Reciproc, se demonstrează că partea reală și cea complexă a oricărei funcții analitice sînt funcții conjugate de  $y$  și  $x$  și prin urmare satisfac ecuația lui Laplace. Funcțiile analitice ne oferă un mijloc foarte comod de a obține un mare număr de funcții conjugate și deci soluții ale ecuației lui Laplace.

Exemplul 1. Să considerăm funcția

$$Z = f(z) = \sin z.$$

În virtutea formulelor lui Euler pentru valori complexe,

$$\sin z = \sin(x + iy) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \text{iar} \quad \cos z = \cos(x + iy) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

în care dacă facem  $x = 0$ , obținem

$$\sin iy = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad \cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Folosind formula de adunare din trigonometrie, ce se păstrează și pentru numere complexe,

$$f(z) = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy,$$

în care, dacă introducem valorile de mai sus, obținem

$$f(z) = \sin z = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x. \quad (5.11)$$

Separind cantitățile reale de cele complexe,

$$X = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x = V, \quad Y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x = \psi,$$

se poate verifica ușor că  $V$  și  $\psi$  sînt conjugate și că verifică ecuația lui Laplace.

Exemplul 2. Fie funcția

$$Z = f(z) = z^n, \quad (5.12)$$

în care  $n$  poate fi orice număr real. Introducem în această expresie pe  $z$  sub forma exponențială (5.10),

$$Z = f(z) = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta},$$

în care  $r^n$  este modulul, iar  $n\theta$  argumentul numărului complex. Se poate scrie

$$Z = f(z) = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Separind cantitățile reale de cele complexe, obținem

$$X = r^n \cos n\theta = V, \quad Y = r^n \sin n\theta = \psi. \quad (5.13)$$

Se verifică ușor că aceste relații satisfac condițiile (5.7) și ecuația lui Laplace (5.8), exprimată în coordonate polare.

Astfel, pornind de la o funcție obișnuită, putem ajunge la două funcții  $V(x, y)$  și  $\psi(x, y)$ , conjugate, care sînt ambele soluții ale ecuației bidimensionale a lui Laplace. Construind funcții de variabilă complexă, putem găsi o multitudine de soluții ale ecuației lui Laplace, urmînd a găsi apoi problema fizică potrivită soluției respective.

Se poate demonstra că dacă funcțiile  $V(x, y)$  și  $\psi(x, y)$  sînt conjugate în raport cu  $x$  și  $y$ , atunci și  $x$  și  $y$  sînt conjugate în raport cu  $V$  și  $\psi$ .

Într-adevăr, relațiile

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

conduc la

$$\frac{\partial x}{\partial V} = \frac{\partial y}{\partial \psi} \quad \text{și} \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial V}.$$

Astfel dacă o rețea reprezentînd pe  $V$  și  $\psi$  în funcție de  $x$  și  $y$  formează familii de curbe, soluții ale ecuației lui Laplace și familiile de curbe ce vor forma rețeaua, reprezentînd pe  $x$  și  $y$  în funcție de  $V$  și  $\psi$  vor fi la rîndul lor soluții ale ecuației lui Laplace.

Cînd se întîmpină dificultăți în ce privește obținerea, explicit prin calcul, a lui  $x$  și  $y$  în funcție de  $V$  și  $\psi$ , se pot folosi metode grafice.

Din regulile de derivare a funcțiilor rezultă că se pot obține noi funcții conjugate, adunîndu-le cu alte funcții conjugate sau înmulțindu-le cu numere constante.

De exemplu:  $e^x \cos y$  și  $e^x \sin y$  fiind conjugate în raport cu  $x$  și  $y$ , în mod asemănător  $e^{-x} \cos y$  și  $e^{-x} \sin y$  precum și

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y = \operatorname{ch} x \cos y \quad \text{și} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sin y = \operatorname{ch} x \sin y$$

sînt funcții conjugate. De asemenea, deoarece valorile lui  $x$  și  $y$  sînt conjugate, rezultă că și funcțiile  $x + e^x \cos y$  și  $y + e^x \sin y$  sînt conjugate.

Procedeul cel mai general de a obține din familii de curbe, alte familii de curbe plane, care să conserve, după transformare, proprietatea de a continua să constituie diferite alte soluții ale ecuației lui Laplace (în plan) este transformarea conformă. Ea cuprinde de fapt transformările cunoscute din geometria elementară: simetria, omotetia și, mai ales, inversiunea.

În teoria funcțiilor de variabilă complexă, se arată că acest fel de transformări se realizează folosindu-se funcțiile analitice. Pentru aceasta, în expresiile lui  $V$  și  $\psi$  se înlocuiesc variabilele independente, prin alte variabile, ce le

sînt conjugate; se obțin astfel noi rețele ce se întretaie ortogonal și ale căror ochiuri sînt la limită, pătrate.

Din punct de vedere geometric, transformarea conformă  $Z = f(z)$ ,  $f(z)$  fiind o funcție analitică, transformă planul variabilei complexe  $z = x + iy$ , într-un alt plan  $Z = X + iY$  (fig. 5.7). Aceste două planuri sînt în trans-

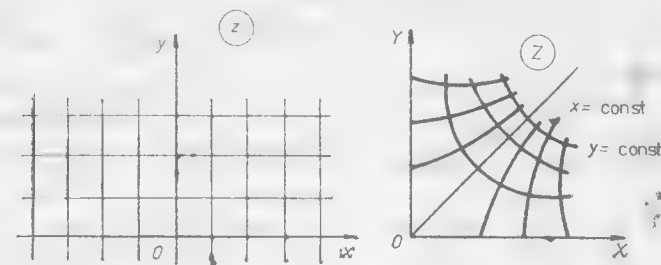


Fig. 5.7.

formarea conformă, întotdeauna legate între ele printr-o funcție  $f$ . Astfel scriind că  $Z = f(z)$ , facem să corespundă fiecărui punct  $P$  din planul  $z$ , un punct conform  $P'$  în planul  $Z$ , fiecărui segment de linie  $ds$  să-i corespundă segmentul  $ds'$ , fiecărei curbe sau figuri geometrice din planul  $z$  să-i corespundă o curbă sau o figură conformă cu planul  $Z$ . În general, fiecare punct din planul  $z$  are o imagine în planul  $Z$ .

În aceleași condiții, este clar că și variabila  $z$  este o funcție de variabila  $Z$ , adică putem avea și o funcție  $z = g(Z)$  care să transforme planul  $Z$  în planul  $z$ , încît fiecărui punct din planul  $Z$  să-i corespundă o imagine în planul  $z$ .

Rezumînd, se demonstrează în teoria funcțiilor de variabilă complexă că, în transformările conforme, între cele două imagini sînt următoarele legături:

- imaginii dintr-un plan îi corespunde, în celălalt plan, o imagine asemănătoare în cele mai mici detalii, dar deformată în vederea de ansamblu;

- fiecărui punct, linii sau figuri într-un plan, îi corespund imaginile în celălalt plan;

- fiecărui unghi cu vîrf în punctul unui plan, îi corespunde un unghi identic, cu vîrf în punctul corespunzător, din celălalt plan;

— unei rețele de linii echipotențiale și de flux (adică spectrului unui cîmp), trasată într-un plan, îi corespunde în celălalt plan o altă rețea de linii echipotențiale și de flux, care satisface la rîndul ei legea lui Laplace.

### 5.3. Aplicarea metodei reprezentărilor conforme în problema cîmpurilor potențiale plane

Bazați pe legătura dintre cîmpurile potențiale plane și teoria funcțiilor de variabilă complexă, avem posibilitatea ca prin metodele analitice, — grafice de reprezentare conformă, să putem transforma cîmpuri fizice potențiale cunoscute, în cîmpuri noi, mai complicate.

Rezolvarea problemelor se bazează pe găsirea acelor funcțiuni de reprezentare conformă  $f(z)$ , respectiv  $g(Z)$ , care transformă imaginile din una în alta, satisfăcînd însă condițiile marginale (la limită), date pentru fiecare caz în parte.

În aplicațiile ce urmează vom lucra, după caz, în coordonatele carteziene  $x, y$ , respectiv  $X, Y$ , sau în coordonatele polare  $r, \theta$ . Pentru fiecare funcție de reprezentare  $Z = f(z)$  sau invers  $z = g(Z)$ , vom obține cite o rețea potențială, care poate fi considerată spectrul unui nou cîmp fizic potențial, care satisface formula lui Laplace în plan.

Cazurile în care se aplică metoda reprezentărilor conforme în problema cîmpurilor potențiale plane sînt numeroase. La început, pentru a ilustra cele arătate mai sus, vom da următorul exemplu.

Să considerăm în semiplanul superior  $z$  rețeaua liniilor echipotențiale  $y = C$  și a liniilor de flux  $x = C'$  (fig. 5.7, a) și funcția de transformare

$$Z = z^{1/2}. \quad (5.14)$$

Pentru planul  $Z$ , obținem

$$Z^2 = z,$$

de unde

$$(X + iY)^2 = x + iy$$

sau

$$X^2 - Y^2 + 2iXY = x + iy.$$

Separînd partea reală de partea imaginară, se va obține în planul  $Z$ , pentru liniile echipotențiale

$$y = 2XY = C,$$

iar pentru liniile de flux

$$x = X^2 - Y^2 = C'.$$

Familiile de curbe, ce reprezintă în planul  $Z$  liniile echipotențiale, se verifică ușor că sînt exprimate prin funcții conjugate, deci se intersectează ortogonal. Ambele sînt formate de hiperbole echilaterale, ce se pot construi dacă se cunosc valorile constante, date în progresie aritmetică, ale lui  $x$  și  $y$  (fig. 5.7, b). Mai observăm că familia curbelor echipotențiale  $2XY = C$  are ca asimptote dreptele  $X = 0$  și  $Y = 0$ , prin urmare, în această transformare, semiplanul superior  $z$  se transformă în primul cadran al planului  $Z$ .

Mai înainte, am arătat cum, construind funcții de variabilă complexă, putem găsi soluții ale ecuației lui Laplace în plan, urmînd ca după aceea să căutăm căror probleme de fizică le corespund soluțiile respective. Această metodă este foarte folositoare, întrucît ea a permis rezolvarea multor probleme privind cîmpurile potențiale plane. Ea prezintă însă neajunsul că se merge oarecum la întîmplare, conducînd adesea la soluții deja cunoscute sau căror nu le corespund nici un fel de probleme fizice reale. Se pune de aceea problema inversă, care în general este insolubilă, de a rezolva ecuația lui Laplace pentru un sistem fizic ales în prealabil. În cazul particular, cînd sistemul fizic se reduce la un poligon, se poate ajunge la rezultate interesante folosind metoda transformărilor conforme a lui Schwartz-Christoffel. Avantajele acestei metode sînt totuși destul de limitate, impunînd totodată și ample dezvoltări analitice, de aceea nu o vom folosi în cele ce urmează.

### 5.4. Studiul unor cîmpuri electrostatice plane particulare

#### 5.4.1. Cîmpul electrostatic produs de o dreaptă infinită, încărcată electric uniform

Vom nota cu  $q$  densitatea liniară de sarcină electrică. Din cauza simetriei, liniile de cîmp vor fi perpendiculare pe dreaptă.

Pentru a determina intensitatea  $\vec{E}$  a cîmpului într-un punct la distanța  $r$  de dreapta încărcată electric, vom presupune o suprafață de forma ariei laterale a unui cilindru

circular cu înălțimea egală cu unitatea, de rază  $r$  și coaxial cu dreapta. Conform legii lui Gauss, fluxul ce străbate acest cilindru va fi

$$\psi = \frac{q}{\varepsilon} = 2\pi r E, \text{ de unde } E = \frac{q}{2\pi\varepsilon r}.$$

Vectorul intensitate a câmpului electrostatic fiind perpendicular pe dreapta respectivă, putem scrie

$$dV = -E dr = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \frac{dr}{r},$$

înclt potențialul dintr-un punct, la distanța  $r$  de dreapta încărcată va fi

$$V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \int \frac{dr}{r} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln r + C = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{1}{r} + C. \quad (5.15)$$

Se observă că potențialul scade logaritmic cu cât ne îndepărtăm de fir, iar suprafețele echipotențiale sînt cilindri coaxiali cu firul,  $C$  fiind o constantă arbitrară, ce se determină prin condițiile la limită, impuse potențialului.

Dacă firul are raza egală cu  $r_1$  și potențialul  $V$ , înlocuind una dintre suprafețele echipotențiale de rază  $r_1$  cu o suprafață conductoare, diferența de potențial  $V - V_1$  dintre cele două suprafețe va fi

$$V - V_1 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r}.$$

Sistemul respectiv formează un condensator cilindric avînd razele  $r$  și  $r_1$ , pe care le considerăm suficient de mici față de lungimea  $l$  a condensatorului, pentru a se evita influența perturbatoare a extremităților. Capacitatea unui asemenea condensator, conform (4.12), va fi

$$C = \frac{q}{V - V_1} = \frac{ql}{-\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r}{r_1}}.$$

Revenind la relația (5.15), curbele echipotențiale, rezultate din intersecția suprafețelor echipotențiale din jurul firului încărcat electric, vor forma o familie de cercuri

concentrice. Expresia potențialului în coordonate polare se mai poate scrie

$$V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln r.$$

Familia curbelor ce reprezintă funcția de flux a liniilor de câmp se obține din (5.15). Pentru aceasta impunem condițiile (5.7),

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Pentru determinarea lui  $\psi$ , trebuie integrată diferențiala totală

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} dr + r \frac{\partial V}{\partial r} d\theta,$$

de unde

$$\psi(r, \theta) = \int -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} dr + \int r \frac{\partial V}{\partial r} d\theta + C.$$

Avînd în vedere (5.15), integrala se reduce la

$$\psi(r, \theta) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \int d\theta + C = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \theta + C. \quad (5.16)$$

Se poate verifica ușor că funcțiile  $V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln r$

și  $\psi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \theta$ , astfel calculate, sînt conjugate, deoarece

îndeplinesc condițiile (5.7). Ele corespund funcției de variabilă complexă

$$\begin{aligned} f(z) = V + i\psi &= -\frac{q}{2\pi\varepsilon} (\ln r - i\theta) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln(re^{i\theta}) = \\ &= -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln z. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Liniiile echipotențiale ale acestui câmp sînt cercuri concentrice de rază  $r$  și, întrucît razele corespund liniilor de câmp, ele au fost reprezentate în figura 5.8 numai în semiplanul superior. Valorile lui  $r$  și  $\theta$ , folosite la construcția figurii 5.8, s-au calculat din expresiile lui  $V = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln r$

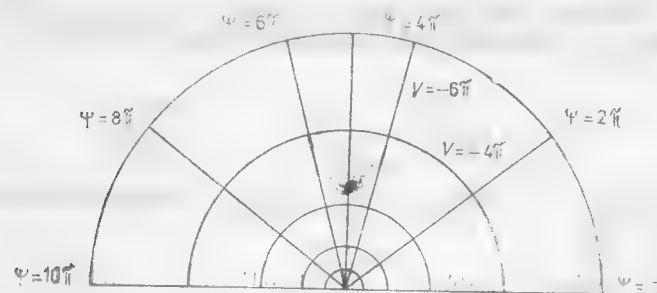


Fig. 5.8.

și  $\psi = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \theta$ . Deși lui  $V$  și  $\psi$  li s-au dat valori în progresie aritmetică și  $\frac{q}{2\pi\epsilon} \approx 10$ , acest fapt nu influențează generalitatea problemei.

Cîmpul fiind plan, putem să permutăm pe  $V$  (cu semn schimbat) pentru a fi îndeplinite condițiile (5.7) cu  $\psi$ , obținind

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \theta \quad \text{și} \quad \psi = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln r, \quad (5.18)$$

care exprimă funcția potențială, respectiv cea de flux, a unui câmp electrostatic, format în interiorul unui unghi diedru  $\theta$ , ale cărui semiplane se găsesc respectiv la potențialele  $V$  și zero.

Pentru a afla intensitatea cîmpului electrostatic în interiorul unghiului diedru, este necesar să determinăm intensitatea cîmpului, dată de relațiile (5.6), în funcție de coordonatele polare. Pentru obținerea acestui lucru trebuie să exprimăm derivatele parțiale ale lui  $V$ , care sînt funcții de  $x$  și  $y$ , cu ajutorul coordonatelor polare  $r$  și  $\theta$ . Avînd în vedere că

$$x = r \cos \theta \quad \text{și} \quad y = r \sin \theta,$$

se obține

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta$$

și

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta$$

Rezolvînd acest sistem de două ecuații în raport cu  $\frac{\partial V}{\partial x}$  și

$\frac{\partial V}{\partial y}$ , obținem

$$-E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \sin \theta,$$

$$-E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \cos \theta.$$

Din (5.6) rezultă

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2}.$$

Ținînd seama de expresia lui  $V$  din relațiile (5.18), obținem, în cele din urmă,

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r}.$$

Prin urmare, într-un punct oarecare dintre cele două semiplane,  $\frac{q}{2\pi\epsilon}$  fiind constant, intensitatea cîmpului este invers proporțională cu distanța de la punctul în care se calculează intensitatea cîmpului electric pînă la muchia unghiului diedru. Notînd cu  $V$  și cu  $\theta$  potențialul semiplanului și respectiv mărimea unghiului diedru, avînd în vedere (5.18), putem scrie

$$E = \frac{V}{\theta} \frac{1}{r}.$$

Tot astfel, densitatea de sarcină superficială pe suprafața laturilor unghiului diedru este, conform teoremei lui Coulomb (§ 5.1),

$$\sigma = \epsilon E.$$

#### 5.4.2. Câmpul unui plan infinit încărcat electric

Considerăm o suprafață plană, infinită, având densitate superficială de sarcină constantă  $\sigma$ . Pentru a calcula intensitatea câmpului electric într-un punct  $P$  (fig. 5.9) vom

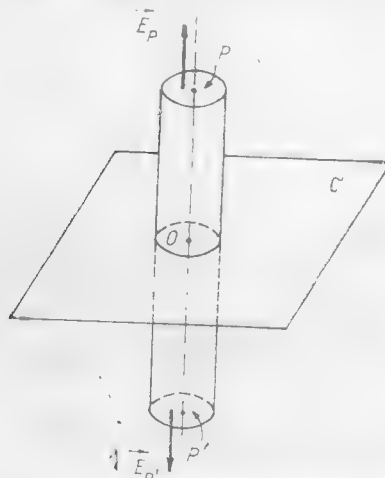


Fig. 5.9.

construi un cilindru cu punctul  $P$  de o parte a planului, iar punctul  $P'$  de cealaltă parte a sa. Fluxul ce străbate cilindrul trece numai prin bazele cilindrii de arie  $A$ , deoarece intensitatea câmpului și generatoarele cilindrii sînt paralele. Dacă notăm cu  $\vec{E}_P$  intensitatea câmpului în punctul  $P$  și cu  $\vec{E}_{P'}$  intensitatea câmpului în punctul  $P'$ , fluxul respectiv va fi

$$A E_P + A E_{P'} = 2 A E_P,$$

deoarece  $E_P = E_{P'}$ . Sarcina închisă de suprafața cilindrii este  $\sigma A$ , deci în conformitate cu teorema lui Gauss,  $2 A E_P = \frac{\sigma A}{\epsilon}$ , de unde  $E_P = \frac{\sigma}{2 \epsilon}$ . Câmpul fiind uniform, spec-

trul său este format dintr-o rețea de drepte perpendiculare și echidistante.

#### 5.4.3. Câmpul produs de două plane paralele și infinite, încărcate electric cu semne contrare

Aplicînd și în acest caz teorema lui Gauss, construind un cilindru care include cele două plane, ca în figura 5.10, a, se vede ușor cum câmpul este zero în afara celor două plane. Considerînd o cutie ce închide numai cîte una dintre supra-

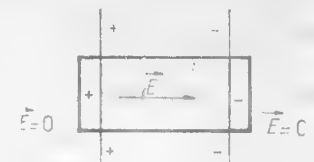
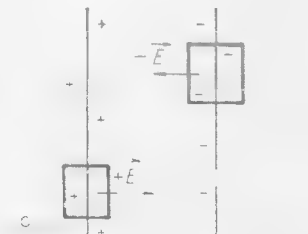


Fig. 5.10.



fețe, ca în figurile 5.10, b și c, se poate vedea cum câmpul dintre cele două plane trebuie să fie de două ori mai mare decît pentru un singur plan,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

De asemenea, între cele două plane câmpul este uniform, iar spectrul său este format dintr-o rețea de drepte rectangulare.

#### 5.4.4. Transformarea definită de funcția analitică $Z = \sin z$

Avînd în vedere (5.11), această funcție variabilă complexă se poate scrie

$$Z = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x,$$



ceea ce conduce la transformarea

$$X = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x \quad \text{și} \quad Y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x, \quad (5.19)$$

unde  $X$  și  $Y$  sînt funcții conjugate. Dacă în planul  $z$ , vom înscrie o rețea de curbe ortogonale, reprezentînd două funcții conjugate, cu ajutorul funcțiilor (5.19), rețeaua respectivă va putea fi transformată în planul  $Z$ , în altă rețea, ce va reprezenta, la rîndul ei, alte două familii de curbe ortogonale, soluții ale ecuației lui Laplace.

Pentru exemplificare, vom considera în planul  $z$  cazul simplu, folosit frecvent, al funcțiilor

$$x = C_1, \quad y = C_2,$$

care, evident, sînt funcții conjugate. Ele reprezintă, dacă se dau constantelor diferite valori, o rețea de drepte perpendiculare, paralele cu axele  $Ox$  și  $Oy$ . Dînd acestor constante valori în progresie aritmetică cu rația  $\frac{\pi}{6}$ ,

$$-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \quad (5.20)$$

vom obține rețeaua reprezentată în planul  $z$  prin figura 5.11, a. Dacă introducem pe rînd în formulele (5.19) aceste numere, obținem pentru  $X$  și  $Y$  valorile înscrise în tabelul 5.1. Cu ajutorul acestor valori am construit liniile echipotențiale și de cîmp, în care se transformă în planul  $Z$  rețeaua de drepte din planul  $z$  (fig. 5.11, b). Această metodă

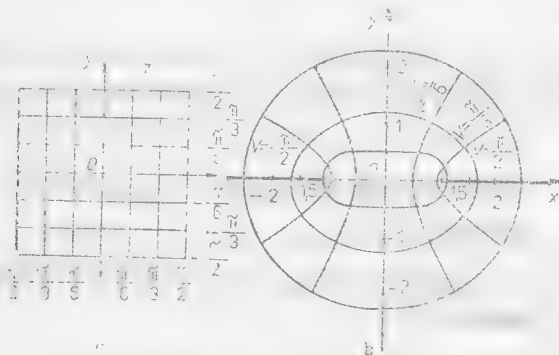


Fig. 5.11.

Tabelul 5.1

	x											
	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$
$\frac{\pi}{2}$	2,51	2,17	1,25	0	-1,25	-2,17	-2,51	0	1,25	1,99	2,51	0
$\frac{\pi}{3}$	1,60	1,39	0,80	0	-0,80	-1,39	-1,60	0	0,80	1,08	1,60	0
$\frac{\pi}{6}$	1,14	0,99	0,57	0	-0,57	-0,99	-1,14	0	0,57	0,48	1,14	0
0	1,00	0,87	0,50	0	-0,50	-0,87	-1,00	0	0,57	0,43	1,00	0
$-\frac{\pi}{6}$	1,14	0,99	-0,57	0	-0,57	-0,99	-1,14	0	-0,55	-0,48	-1,14	0
$-\frac{\pi}{3}$	1,60	1,39	-0,80	0	-0,80	-1,39	-1,60	0	-1,25	-1,08	-1,60	0
$-\frac{\pi}{2}$	2,51	2,17	-1,25	0	-1,25	-2,17	-2,51	0	-2,30	-1,99	-2,51	0

grafică este generală, putându-se aplica și în cazuri mai complicate, cînd în loc de  $x = C_1$  și  $y = C_2$ , rețeaua din planul  $Z$  reprezintă două familii de curbe  $f_1(x, y) = C_1$  și  $f_2(x, y) = C_2$  conjugate. Din aceste funcții nu se pot obține, prin metode elementare, ca în cazurile de mai înainte, expresiile lui  $x$  și  $y$ , în funcție de  $C_1$  și  $C_2$ , pentru a putea folosi apoi relațiile de transformare (5.19).

Metoda constă, în fond, în construcția „prin puncte” a rețelei (transformate) din planul  $Z$ , în care perechile de numere  $X_1^i Y_1^i, X_2^i Y_2^i, \dots, X_n^i Y_n^i, \dots$  din tabelul 5.1 înscrise în linii reprezintă, din punct de vedere fizic, cum vom arăta mai jos, punctele ce servesc la construcția liniilor de cîmp, iar cele din coloane, la construcția curbelor echipotențiale. Această metodă este suficient de exactă și de expeditivă, dacă pentru efectuarea calculului se folosește un minicalculator electronic.

În cazul exemplului nostru, transformarea se poate obține ușor și pe cale analitică. Pentru aceasta, vom elimina întâi pe  $x$  și apoi pe  $y$  din ecuațiile (5.19), folosind relațiile

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 = 1$$

și obținem

$$\frac{X^2}{\sin^2 x} - \frac{Y^2}{\cos^2 x} = 1; \quad \frac{X^2}{\left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2} - \frac{Y^2}{\left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2} = 1. \quad (5.21)$$

Rezultă că drepte  $x = C_1$  și  $y = C_2$  din planul  $z$ , se transformă în planul  $Z$ , în hiperbole și respectiv în elipse omofocale. Va fi suficient să introducem în relațiile (5.21), pe rînd, valorile din șirul (5.20) pentru a trasa rețeaua acestor curbe, în planul  $Z$ .

Problema fizică ce corespunde acestei transformări este acum simplă. Vom considera două plane verticale conductoare și infinite, încărcate uniform cu sarcini egale și de semn contrar la potențialele  $-\frac{\pi}{2}$  și  $\frac{\pi}{2}$ , între care, după cum s-a arătat în paragraful precedent, se formează un cîmp uniform. În planul  $z$ , intersecția acestor plane,

cu planul  $z$ , sînt drepte  $x_1 = -\frac{\pi}{2}$  și  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ , para-

lele cu axa  $Oy$ , care sînt linii echipotențiale, la fel ca și toate drepte paralele cuprinse între ele. Liniile de cîmp sînt perpendiculare pe acestea. Astfel cum sînt trasate în figura 5.11, a, ele reprezintă spectrul cîmpului plan, format între două plane, infinite, uniform încărcate cu sarcini de semn contrar. Prin transformarea conformă, obținută cu ajutorul relațiilor (5.19), respectiv (5.21), liniile echipotențiale au fost transformate în hiperbole, iar liniile de cîmp în elipse omofocale.

Fiecare dintre liniile echipotențiale poate fi materializată, menținînd-o la același potențial. Vom materializa semidrepte  $V = -\frac{\pi}{2}$  și  $V = \frac{\pi}{2}$ , în care au degenerat în planul  $Z$ , hiperbolele din care au provenit drepte  $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2}$  din planul  $z$  (fig. 5.11, b).

Cum în această transformare sînt respectate condițiile la limită, iar spectrul este format dintr-o rețea de curbe reprezentînd soluții ale ecuației lui Laplace, soluția găsită este unică. Ea reprezintă cîmpul ce se formează, dacă într-un plan infinit se practică o fantă largă, iar semiplanele rezultate sînt încărcate cu sarcini electrice egale și de semn contrar.

## 5.5. Studiul unor cîmpuri plane în electrocinetică

### 5.5.1. Introducere

Dacă între două armături, menținute la potențial constant, se introduce un fluid bun conductor electric, purtătorii de sarcini din interiorul fluidului se vor deplasa sub influența cîmpului electrostatic.

Între particulele de fluid încărcate și moleculele neutre existente în fluid se vor dezvolta forțe de frecare, proporționale cu viteza și suficient de importante pentru a anihila forțele inerțiale. În aceste condiții, vitezele sarcinilor electrice vor fi proporționale cu cîmpul accelerator, iar potențialul forțelor devine în același timp și potențial de viteze; fluxului de forțe  $i$  se va suprapune fluxul electric, ambele fiind descrise prin formule identice.

Experiența dovedește că aceste ipoteze sînt valabile atît pentru conductorii electrolitici cît și pentru cei metalici.

Dacă notăm cu  $V$  potențialul (forțelor sau vitezelor) și prin  $\phi$  fluxul (de forță sau de curent), prin  $X$  și  $Y$  componentele densității curenților, pentru un lichid avînd conductanța egală cu unitatea, în cazul cîmpului pînă, vom avea relațiile

$$-X = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad -Y = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Rețeaua liniilor de curent și a celor de potențial va avea ochiurile elementare pătrate și toate soluțiile găsite în electrostatică, pot fi folosite și în electrocINETICĂ, dacă înlocuim noțiunea de linie de cîmp prin linie de curent.

Astfel, dacă într-un vas metalic cilindric, umplut cu un lichid conductor, vom introduce în axul său un fir metalic și vom stabili între vas și fir o diferență de potențial, liniile echipotențiale și de curent se vor prezenta ca în figura 5.8 (evident, dacă se completează figura prin simetrie).

Pentru un mediu conductor, calculul rezistenței în electrocINETICĂ este simplu. Pentru aceasta, între două suprafețe echipotențiale foarte apropiate, considerăm două elemente corespondente, de suprafață  $S$ . Capacitatea lor este

$$C = \frac{\epsilon S}{l},$$

în care  $C$  — capacitatea, în farazi;  $\epsilon$  — permitivitatea absolută a mediului dintre armături, în F/m;  $S$  — suprafața elementului, în m<sup>2</sup>;  $l$  — distanța dintre cele două elemente, în m. Rezistența mediului va fi

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

în care  $R$  — rezistența, în  $\Omega$ ,  $\rho$  — rezistivitatea, în  $\Omega \cdot m$ . Din cele două relații deducem

$$CR = \epsilon \rho$$

Conductanța  $\frac{1}{R}$  este deci proporțională cu capacitatea.

Astfel, rezistența electrică a lichidului în care se introduce un sistem de doi conductori menținuți la potențiale

diferite se poate calcula prin relația următoare, atunci cînd se cunoaște capacitatea sistemului de conductori,

$$R = \frac{\epsilon \rho}{C}. \quad (5.22)$$

De exemplu, am calculat capacitatea unui condensator cilindric de lungime  $l$  avînd respectiv razele  $r_1$  și  $r$  ( $r < r_1$ ),

$$C = \frac{2 \pi \epsilon l}{\ln \frac{r_1}{r}}.$$

Rezultă că rezistența lichidului conductor (în curent continuu), de rezistivitate  $\rho$ , ce se introduce în spațiul dintre cei doi cilindri ce formează armăturile condensatorului este

$$R = \frac{\rho}{2 \pi l} \ln \frac{r_1}{r}.$$

Ținînd seama de cele expuse la începutul acestui paragraf, vom continua în electrocINETICĂ studiul unor cîmpuri, soluții ale ecuației lui Laplace, în plan.

### 5.5.2. Cîmpul electrostatic produs de două fire paralele, avînd densități liniare de sarcină egale și de semn contrar

Cîmpul electrostatic, produs de o sarcină liniară uniformă, ce se găsește în originea axelor de coordonate, poate fi exprimat prin funcția de variabilă complexă (5.17),

$$f(z) = -\frac{q}{2 \pi \epsilon} \ln z.$$

Dacă sarcina se găsește într-un punct oarecare din planul complex de afix  $z_0$ , noua expresie a cîmpului se obține printr-o translație a axelor de coordonate (fig. 5.12),

$$f(z) = -\frac{q}{2 \pi \epsilon} \ln(z - z_0).$$

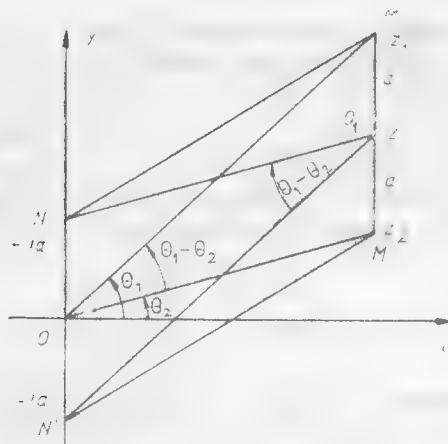


Fig. 5.12.

Dacă sarcina se va găsi pe axa  $Oy$ , avînd afixul  $ia$ , cîmpul va fi reprezentat prin relația

$$f_1(z) = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln(z - ia),$$

iar cîmpul produs de sarcina egală și de semn contrar, așezată simetric față de originea axelor de coordonate cu afixul  $-ia$ , va fi

$$f_2(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln(z + ia).$$

Știind că prin însumarea a două sau mai multor funcții conjugate se obține tot o funcție conjugată, cîmpul rezultat din suprapunerea cîmpurilor produse de ambele sarcini este

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_1) + f(z_2) = \frac{q}{2\pi\epsilon} [\ln(z + ia) - \ln(z - ia)] = \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{z + ia}{z - ia} \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{x + i(y + a)}{x - i(y - a)} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{z_1}{z_2} = \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

în care

$$z_1 = x + i(y + a), \quad z_2 = x + i(y - a),$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y + a)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$$

și

$$\theta_1 = \arctg \frac{y + a}{x}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{y - a}{x}.$$

Rezultă că relația (5.23) se scrie

$$f(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2} + i(\theta_1 - \theta_2) \right].$$

Separînd partea reală de cea complexă, obținem pentru funcțiile potențial și de flux, relațiile

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}, \quad (5.24)$$

$$\psi = -\frac{q}{2\pi\epsilon} (\theta_1 - \theta_2). \quad (5.25)$$

Curbele echipotențiale se obțin făcînd  $V = C$ , în care  $C$  este o constantă care primește diferite valori în progresie aritmetică.

Dacă funcția  $V$  din (5.24) este constantă, rezultă că

$$\frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2} = C_1,$$

$C_1$  fiind o altă constantă ce se poate deduce din  $C$ . Această expresie reprezintă familia de cercuri

$$x^2 + y^2 - 2a \frac{C_1 + 1}{C_1 - 1} y + a^2 = 0.$$

Deci liniile echipotențiale vor fi reprezentate printr-o familie de cercuri cu centrele pe  $Oy$ , a căror poziție este dată de relația

$$y_1 = a \frac{C_1 + 1}{C_1 - 1} \quad (5.26)$$

și avind razele egale cu

$$r_1 = a \sqrt{\left(\frac{C_1 + 1}{C_1 - 1}\right)^2 - 1} = 2a \frac{\sqrt{C_1}}{C_1 - 1}. \quad (5.27)$$

Familia curbelor ce reprezintă liniile de cîmp se exprimă prin

$$\psi = \frac{q}{2\pi\epsilon} (\theta_1 - \theta_2) = C',$$

unde  $C'$  este, de asemenea, o constantă. Prin urmare,  $\theta_1 - \theta_2 = C_2$  este tot o constantă, exprimată în radiani.

Pentru a înțelege semnificația acestor constante, luăm în planul complex  $z$  (fig. 5.12), punctele  $M$ ,  $M'$  și  $O_1$ , care sînt imaginile lui  $z$ ,  $z_1$  și  $z_2$ , argumentele lui  $z_1$  și  $z_2$  fiind  $\theta_1$  și  $\theta_2$ . Observăm că  $\theta_1 - \theta_2$  este egal cu unghiul  $MOM'$ . Construind paralelogramul  $NMM'N'$ , se demonstrează ușor că triunghiurile  $NO_1N'$  și  $MOM'$  sînt egale și ca o

consecință,  $\widehat{MOM'} = \widehat{NO_1N'} = \theta_1 - \theta_2 = C_2$ . Prin urmare, liniile de cîmp sînt locul geometric al punctelor din care segmentul  $NN'$  se vede sub un unghi dat. De unde, urmează că liniile de cîmp sînt o familie de arce de cerc (fig. 5.13), cu centrele pe axa numerelor reale. Aceste arce de cerc trec

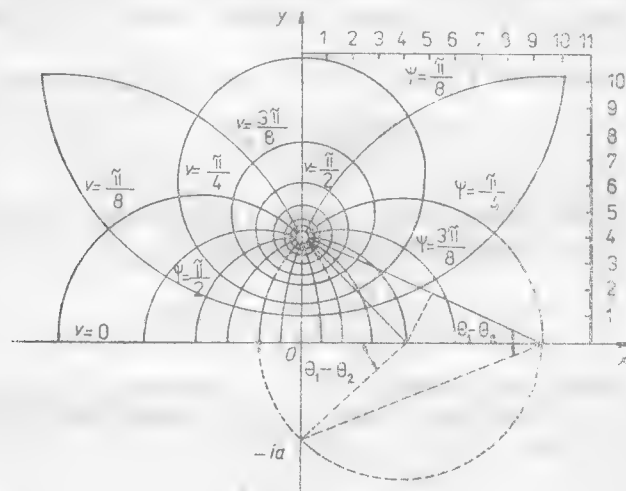


Fig. 5.13.

prin punctele de afix  $ia$  și  $-ia$ , avind coordonatele centrelor date de relația

$$x_2 = \frac{a}{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{a}{\operatorname{tg} C_2}, \quad (5.28)$$

razele lor fiind egale cu

$$r_2 = \frac{a}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{a}{\sin C_2}. \quad (5.29)$$

Pentru a trasa curbele echipotențiale și liniile de cîmp, vom da valori, în progresie geometrică cu aceeași rație, funcției potențiale  $V$  (5.24) și celei de flux  $\psi$  (5.25), egalate cu constantele  $C$  și  $C'$ ,

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{1}{2} \ln C_1 = C, \quad (5.30)$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi\epsilon} \left( \operatorname{arctg} \frac{y+a}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y-a}{x} \right)$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{q}{2\pi\epsilon} C_2 = C'.$$

Din aceste relații vom calcula constantele  $C_1$  și  $C_2$ , care, introduse în (5.26), (5.27) (5.28) și (5.29), ne vor da posibilitatea, în cele din urmă, de a calcula pozițiile centrelor și mărimile razelor cercurilor ce reprezintă curbele echipotențiale și de cîmp.

Pentru simplificare, luăm  $\frac{q}{2\pi\epsilon} = 1$ , iar rația progresiei aritmetice o vom lua egală cu  $\pi/8$ , înscriind rezultatele în tabelul 5.2. Cu datele obținute din acest exemplu, luind  $a = 4$ , am construit rețeaua de cercuri din figura 5.13, reprezentînd cîmpul în semiplanul superior, cîmpul produs în semiplanul inferior fiindu-i simetric.

În figura 5.13 am reprezentat și liniile de curent și curbele echipotențiale ce iau naștere între un plan conductor infinit și un conductor cilindric paralel, între care se stabilește o diferență de potențial, aflate într-un mediu conductor nelimitat.

Aceeași figură 5.13, completată prin simetrie, va reprezenta, în aceleași condiții, liniile de curent și curbele echipotențiale ce iau naștere între doi conductori cilindrici paraleli, a căror rază este mică în raport cu distanțele dintre ei.

Tabelul 5.2

$G \rightarrow V$	$C_1$	$\frac{y_1}{a}$	$\frac{r_1}{a}$	$\psi = C' = C_2$	$\frac{x_2}{a}$	$\frac{r_2}{a}$
0	1,00	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
$\frac{\pi}{8}$	2,19	2,69	2,48	$\frac{\pi}{8}$	2,41	2,61
$\frac{\pi}{4}$	4,81	1,52	1,15	$\frac{\pi}{4}$	1,00	1,41
$3 \frac{\pi}{8}$	10,55	1,21	0,68	$3 \frac{\pi}{8}$	0,41	1,08
$\frac{\pi}{2}$	23,14	1,09	0,43	$\frac{\pi}{2}$	0	1,00
$5 \frac{\pi}{8}$	50,75	1,04	0,28	$5 \frac{\pi}{8}$	-0,41	1,08
$3 \frac{\pi}{4}$	113,32	1,01	0,19	$3 \frac{\pi}{4}$	-1,00	1,41
$7 \frac{\pi}{8}$	244,15	1,01	0,12	$7 \frac{\pi}{8}$	-2,41	2,61
$\pi$	535,49	1,00	0,09	$\pi$	$-\infty$	$\infty$

În tabelul 5.2 se observă că  $C_1$  crește foarte repede o dată cu creșterea potențialului, încît pentru valori apreciabile ale potențialului, avem

$$C_1' - 1 \approx C_1,$$

iar relația (5.27) devine

$$r_1 \approx 2a \frac{\sqrt{C_1}}{C_1}, \text{ de unde } C_1 \approx \frac{4a^2}{r_1^2}.$$

Introducînd expresia lui  $C_1$  în relația (5.30), putem evalua potențialul

$$V \approx \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2a}{r_1}. \quad (5.31)$$

Dacă raza  $r_1$  a cercurilor echipotențiale este suficient de mică, centrele lor se confundă cu punctele  $a$  și  $-a$ . Ținînd seama de faptul că putem materializa orice suprafață echipotențială printr-o suprafață conductoare, fără ca structura cîmpului să se schimbe, relația (5.31) exprimă potențialul unui conductor liniar, de rază  $r_1$ , mică în raport cu distanța  $a$  pînă la un plan conductor paralel, aflat la potențialul zero. Deoarece  $q$  este sarcina pe unitatea de lungime, notînd cu  $l$  lungimea conductorului, sarcina electrică de pe întreg conductorul este

$$Q = ql,$$

iar capacitatea condensatorului format din conductor și planul conductor, conform relației (4.12) este

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{ql}{\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2a}{r_1}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2a}{r_1}}.$$

Cu această relație se poate calcula, de exemplu, capacitatea unei linii electrice aeriene, așezată paralel cu pămîntul.

Doi conductori cilindrici paraleli, avînd razele  $r_1$ , mici în raport cu distanța  $d = 2a$  dintre ei, încărcăți cu sarcini electrice egale și de semn contrar, vor avea potențialele

$$V_1 \approx \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{r_1}, \quad V_2 \approx -\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{r_1},$$

iar diferența de potențial,

$$V_1 - V_2 \approx \frac{q}{\pi\epsilon} \ln \frac{d}{r_1}.$$

Dacă notăm cu  $l$  lungimea conductorilor, capacitatea lor va fi

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{ql}{\frac{q}{\pi\epsilon} \ln \frac{d}{r_1}} = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{d}{r_1}}.$$



Dacă între acești conductori se menține o diferență de potențial, și-i introducem într-un lichid bun conductor electric, având practic un volum nelimitat în raport cu dimensiunile conductorilor, curentul electric ce ia naștere în lichid va avea rezistența (5.22)

$$R = \frac{\rho l}{C} = \frac{\rho}{\pi l} \ln \frac{d}{r_1}.$$

Notând cu  $U$  tensiunea electrică dintre cei doi conductori, intensitatea curentului din fluid va fi

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\pi l U}{\rho \ln \frac{d}{r_1}}.$$

### 5.5.3. Transformarea $Z = f(z) = z^n$ în care $n$ poate fi orice număr real

Am văzut că expresia (5.12) este o funcție analitică. Prin urmare, prin transformări conforme, o putem folosi la obținerea altor cîmpuri, din cîmpuri fizice cunoscute. Astfel am procedat pentru cîmpul reprezentat în figura 5.11. Formulele de transformare, pentru descrierea noilor curbe echipotențiale și linii de cîmp sînt relațiile (5.13). Aceste relații au o interpretare geometrică simplă. Ele servesc la obținerea transformărilor respective prin construcții geometrice. Fie cele două plane  $z$  și  $Z$  (fig. 5.14), în

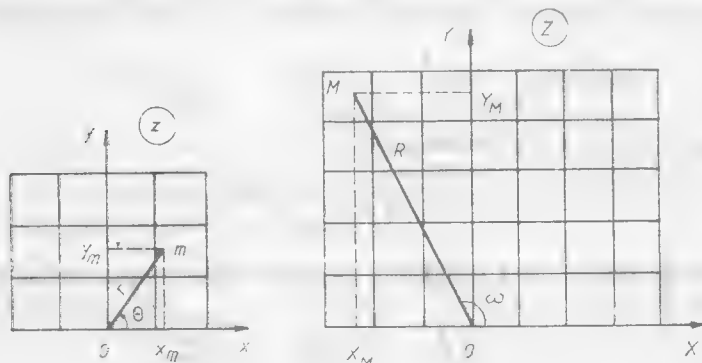


Fig. 5.14.

care s-au trasat două rețele dreptunghiulare cu ochiuri pătrate, avînd laturile egale cu unitatea. Făcînd transformarea, observăm că unui punct  $m$  din planul  $z$ , avînd modulul  $r$  și argumentul  $\theta$ , ținînd seama de relațiile (5.13), îi va corespunde în planul  $Z$ , un punct  $M$ , avînd modulul  $R = r^n$  și argumentul  $\omega = n\theta$ .

Drept exemplu, vom lua cazul particular al transformării  $Z = z^2$ , care se poate rezolva ușor prin calcul. În această transformare, vom considera în planul  $z$  curbele echipotențiale  $x = \text{const}$ , iar liniile de cîmp  $y = \text{const}$ , ceea ce corespunde cîmpului format de două plane verticale infinite, între care se stabilește o diferență de potențial.

În coordonate carteziene, obținem în planul  $z$  (fig. 5.14)

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta,$$

iar în planul  $Z$ ,

$$X = R \cos \omega = r^2 \cos 2\theta; \quad Y = R \sin \omega = r^2 \sin 2\theta.$$

Deoarece

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{și} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

rezultă

$$X = x^2 - y^2; \quad Y = 2xy.$$

Eliminînd pe rînd din acest sistem de ecuații pe  $x$  și  $y$ , obținem

$$Y^2 - 4y^2 X - 4y^4 = 0, \quad Y^2 + 4x^2 X - 4x^4 = 0.$$

Dînd lui  $x$  și  $y$  valori constante în progresie aritmetică, cu aceeași rație, obținem în planul  $Z$  două familii de parabole ortogonale, în care s-a transformat rețeaua de drepte din planul  $z$  (fig. 5.15).

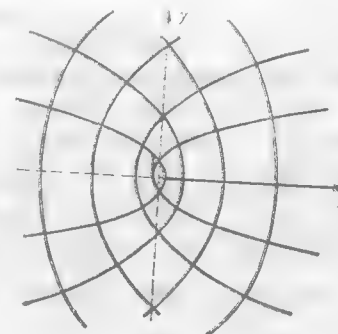


Fig. 5.15.

Prin această transformare se obține distribuția liniilor de curent (și a curbelor echipotențiale) produse de un semiplan vertical, așezat la dreapta la infinit, deasupra axei  $Ox$ . Aceste linii ajung, după ce înconjoară un semiplan izolant orizontal, la un alt semiplan vertical, așezat la dreapta, la infinit, sub axa  $Ox$ . Cele două semiplane între care se stabilește o diferență de potențial, se găsesc într-un mediu bun conducător de electricitate.

#### 5.5.4. Transformarea $Z = f(z) = z^{3/2}$

Această transformare este un alt caz al transformării  $f(z) = z^n$ .

În această situație, fiecărui punct din planul  $z$  îi va corespunde în planul  $Z$  câte un punct având modulul  $R = r^{3/2}$  și argumentul  $\omega = \frac{3}{2} \theta$ .

Vom efectua această transformare, operind asupra cîmpului uniform, reprezentat în figura 5.16 printr-o rețea de drepte ortogonale, în care liniile de cîmp și cele

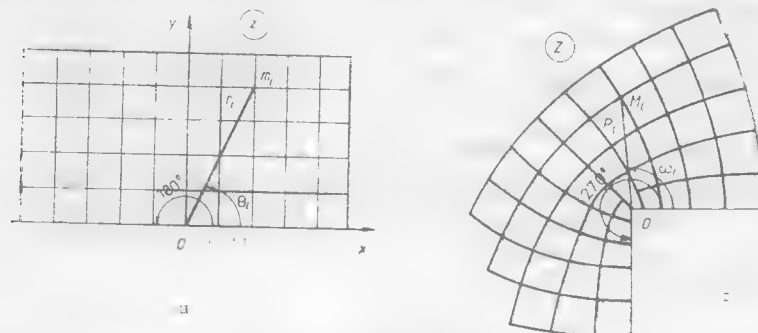


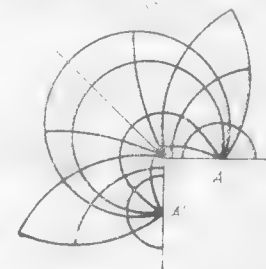
Fig. 5.16.

echipotențiale sînt exprimate, respectiv prin  $y = \text{const}$  și  $x = \text{const}$ . În această transformare, orice punct de pe semi-axa pozitivă a numerelor reale, avînd argumentul egal cu zero, după transformare rămîne în planul  $Z$ , de asemenea, pe semi-axa pozitivă. Punctele de pe semi-axa negativă din planul  $z$ , avînd argumentul egal cu  $180^\circ$ , vor trece în planul  $Z$ , pe o dreaptă care face un unghi  $\frac{3}{2} \cdot 180 = 270^\circ$ , deci axa se „îndoie” cu un unghi de  $90^\circ$  (fig. 5.16, b).

Pentru a determina liniile de cîmp și curbele echipotențiale ale rețelei transformate în planul  $Z$ , vom trasa razele vectoare  $r_i$ , care corespund fiecărui nod  $m_i$  al rețelei de drepte din planul  $z$ . Pentru a obține apoi punctele corespunzătoare din planul  $Z$ , în care se transformă punctele  $m_i$ , vom ridica la puterea  $\frac{3}{2}$ , valoarea numerică a segmentului  $r_i$  și vom obține modulele lor,  $R_i$ . Argumentele  $\omega_i$  le aflăm înmulțind cu  $\frac{3}{2}$  argumentul  $\theta_i$  ale punctelor  $m_i$ . Astfel s-au trasat la o scară redusă liniile de cîmp și curbele echipotențiale din figura 5.16, b.

Să aplicăm aceeași transformare în cazul a două izvoare cilindrice  $AA'$  avînd debitele egale și de sens contrar, a căror linii de curent și echipotențiale sînt cercuri, pe care le trasăm, completînd prin simetrie figura 5.13. În planul  $Z$ , liniile centrelor celor două surse trec într-un unghi drept, pe care îl vor înconjura celelalte linii de curent. Vom obține figura 5.17, în care sînt trasate liniile de curent și cele echi-

Fig. 5.17.



potențiale, ce le formează două izvoare de curent cilindrice  $AA'$ , care se găsesc, fiecare pe laturile unui unghi drept, cînd sînt introduse într-un mediu conductor nelimitat.

În cazul tuturor acestor cîmpuri, determinate în virtutea proprietăților funcțiilor de variabilă complexă, putem calcula pe baza celor arătate în 5.5.2, fluxul și, respectiv, densitatea de curent, în orice punct al mediului conductor, dacă îi cunoaștem rezistivitatea.

Ca aplicație practică, se poate calcula, de exemplu, în cazul electrolizei, grosimea stratului de metal ce se depune în diferite puncte pe suprafața unui electrod.

## 5.6. Modelarea experimentală a cîmpurilor potențiale plane

În cuprinsul acestui capitol s-a arătat, prin numeroase exemple, cum se poate obține prin calcul structura cîmpurilor potențiale plane. Această structură este caracterizată prin liniile echipotențiale și de cîmp, deoarece din așezarea lor se poate calcula (v. § 5.2) în orice punct intensitatea cîmpului. În practică se pun însă adesea probleme complicate, a căror rezolvare poate fi foarte dificilă, dacă nu chiar inaccesibilă calculului. În astfel de cazuri, se recurge la metode experimentale. Datorită analogiei ce există între diferitele tipuri de cîmpuri potențiale, una dintre metodele experimentale folosite pentru determinarea configurației lor este modelarea experimentală cu ajutorul cîmpului electrocinetic. În această metodă se înlocuiește studiul unor astfel de cîmpuri prin studiul unor cîmpuri electrice staționare analoage, în lichide slab conductoare. Metoda permite trasarea liniilor echipotențiale între electrozii introduși în lichidul conductor. După ce liniile echipotențiale au fost determinate, se poate trasa orice linie de cîmp, avînd în vedere ortogonalitatea lor.

### 5.6.1. Metoda electrochimică a inelelor lui Nobili

Una dintre cele mai vechi metode de modelare electrocinetică este următoarea (realizată pentru prima oară de Nobili, în 1827).

Se confecționează, din sticlă sau material plastic, o baie electrochimică cu fund plat (fig. 5.18), adică de aproximativ 10 cm, avînd celelalte două dimensiuni destul de



Fig. 5.18.

mari, pentru ca influența pereților să fie neglijabilă. Fundul acestei băi se acoperă, cît se poate de exact, cu o foaie metalică de cupru, argint sau fier. Se toarnă apoi în baie o soluție de acetat de cupru și de plumb, dacă fundul este din cupru sau argint, și de tartrat dublu de antimoniu și

potasiu (emetice), dacă fundul este din fier. Se cufundă apoi în baie o serie de electrozi confecționați din oțel șlefuit, fixați prin intermediul unor planșete, astfel ca extremitățile lor inferioare să se găsească în imediata apropiere a plăcii metalice, fără a veni în contact cu ea. Se leagă apoi unii dintre electrozi la polul pozitiv al unei baterii de aproximativ zece volți, iar ceilalți la polul negativ. După închiderea circuitului, datorită peroxidului de plumb ce se depune în straturi transparente, apar foarte frumoase efecte de irizație pe suprafața plăcii care acoperă fundul băii electrolitice. Experiența are o durată de numai câteva minute. Ulterior descoperirii lor, s-a constatat că liniile colorate care apar corespund cu aceeași liniilor echipotențiale, care ar rezulta din aplicarea directă a electrozilor pe un plan conductor avînd același contur cu placa de cupru care acoperă fundul băii. Avînd în vedere continuitatea cîmpului electrocinetic, explicarea apariției acestor linii echipotențiale care se detașează foarte distinct pe suprafața plăcii este destul de obscură. Este posibilă o explicație, luînd în considerație efectele cuantice ale undelor asociate ionilor care se deplasează în soluție, din cauza diferențelor de potențial dintre electrozi.

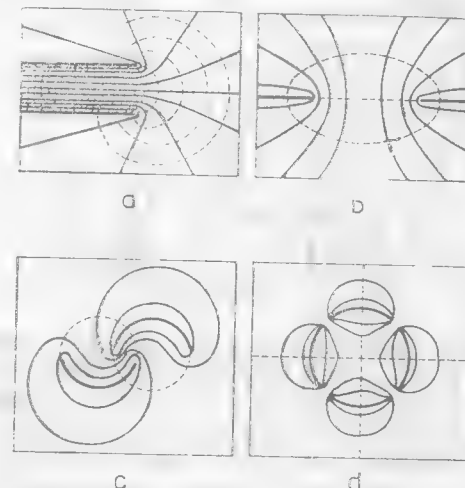


Fig. 5.19.

În figura 5.19, b se arată modul de distribuție a liniilor echipotențiale obținute prin această metodă, între doi electrozi drepți, așezați unul în prelungirea celuilalt,

lăsându-se însă între ei o mică distanță. Ele sînt identice cu cele obținute prin calcul și sînt arătate în figura 5.11, b.

În figurile 5.19 a, c și d sînt arătate distribuțiile de potențial pentru alte configurații mai complicate ale electrozilor.

Dacă se lucrează în condiții îngrijite, astfel încît fundul băii să fie perfect orizontal și dacă prin reflexie în electrolit se verifică poziția verticală a electrozilor, aproximația metodei este de ordinul sutimilor de milimetru.

### 5.6.2. Metoda băii electrolitice

Metoda de determinare a liniilor echipotențiale prin formarea peroxidului de plumb este părăsită astăzi. Se preferă construcția prin puncte a liniilor echipotențiale, formate între doi sau mai mulți electrozi, cu ajutorul unei sonde și a unui instrument de zero cu rezistență interioară mare.

În acest scop, pentru modele ale căror dimensiuni nu întrec 10 pînă la 20 cm și pentru ca influența pereților să fie neglijabilă, se folosește o baie (fig. 5.20) construită din material izolant, avînd lungimea și lățimea egale cu un metru.

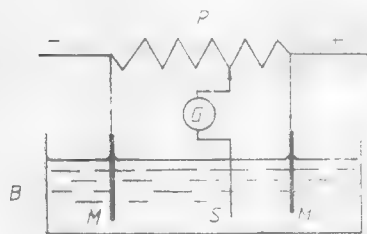


Fig. 5.20.

Adîncimea ei poate diferi de la caz la caz, pentru cîmpurile plane ea poate fi redusă numai la 2 pînă la 3 cm. Trebuie însă să se asigure o poziție perfect orizontală a fundului băii, pentru ca adîncimea electrolitului să fie constantă pe toată suprafața băii.

Electrolitul poate fi apa obișnuită, preferîndu-se însă de cele mai multe ori o soluție diluată de sulfat de cupru. Baia trebuie menținută la temperatura constantă și să fie agitată din cînd în cînd, pentru a-i asigura omogenitatea.

Modelul *M* de electrod care se studiază fiind de dimensiuni reduse, poziția sondei cu care se explorează cîmpul trebuie să fie reperată cu mare precizie prin măsurarea coordonatelor, iar dimensiunile modelelor trebuie stabilite cu precizia de 0,1 mm. Pentru reperarea sondei, se așază pe baia electrolitică o construcție foarte rigidă; pe care se dispune un sistem de bare mobile articulate, care permit deplasarea electrodului mobil, măsurîndu-i totodată și coordonatele.

În alte dispozitive, se folosește un pantograf care permite înscrierea traiectoriei în lichid a sondei, direct pe o foaie de hirtie. Pentru evitarea inevitabilelor tatonări, se poate prevedea mecanismul înregistrator cu un electromagnet care poate fi acționat de operator cînd instrumentul de măsură este adus la echilibru.

În cazul cîmpurilor plane, sonda poate fi o vergea metalică subțire, verticală, din platină sau cupru care ocupă toată înălțimea băii.

Curentul folosit poate fi continuu, de preferință cu anod solubil. Dacă experiența nu este bine condusă, se pot produce fenomene de polarizare care pot introduce în circuitul sondei tensiuni electromotoare parazite, care pot modifica suprafața utilă a modelelor folosite.

Instrumentul de măsură este legat între sondă și cursorul unui potențiometru gradat. Cînd sonda se manevrează în așa fel încît instrumentul de măsură să se mențină la zero, ea descrie o curbă echipotențială, a cărei cotă este cunoscută, datorită gradațiilor potențiometrului.

Pentru evitarea fenomenelor de polarizare, unii experimenatori preferă în locul curentului continuu curentul alternativ de frecvență sonoră, generat de un dispozitiv electronic, iar în locul instrumentului de măsură un difuzor sau cască. Punctul zero va fi marcat atunci cînd casca sau difuzorul încetează emiterea de sunete. Se poate introduce înaintea difuzorului sau căștii un dispozitiv amplificator.

Pentru determinarea intensității cîmpului, trebuie să se cunoască rezistivitatea electrolitului, care se determină prin introducerea acestuia într-un tub de sticlă cilindric, calibrat, închis la capete cu doi electrozi, perfect paraleli.

Metoda băii electrolitice poate fi folosită și pentru determinarea suprafețelor echipotențiale, ale cîmpurilor potențiale tridimensionale. În acest caz baia trebuie să

fie mai adincă, iar sonda să fie făcută dintr-un fir de cupru sau platină, complet izolat, în afară de extremitatea sa inferioară.

Pentru modelarea experimentală a cîmpurilor fizice se mai folosesc și alte metode, dintre care cităm procedeele electrostatice cu pulberi sau cu tuburi luminescente, procedeele termice, procedeele magnetice cu pilitură de fier, procedeele hidrodinamice etc., asupra cărora nu vom insista.

## Capitolul 6. MODELAREA ÎN FIZICA ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ

„Fiecare frază pe care o rostesc trebuie înțeleasă nu ca o afirmație, ci ca o întrebare.”

Niels BOHR

După cum reiese din cele spuse în capitolele precedente, aproape întreaga dezvoltare a fizicii a avut loc ca urmare a căutării unei reprezentări a realității, situate dincolo de aparențele sensoriale.

Încă cu 2000 de ani în urmă, s-a emis ipoteza că toate substanțele sînt formate dintr-un număr foarte mare de atomi. Democrit a făcut prima încercare de modelare în structura materiei, reprezentînd atomii sub diferite forme în funcție de proprietățile avute de substanțele din care fac parte.

Nevoia de a modela realitatea este determinată de imposibilitatea ca aceasta să fie studiată, în forma pe care o percepem, tocmai datorită complexității sale. Aceasta a făcut ca pentru explicarea diferitelor fapte experimentale observate, să se imagineze de către oamenii de știință modele ale fenomenelor, imagini ale lumii reale în care trăim.

### 6.1. Modele atomice

#### 6.1.1. Modelul static al atomului (J.J. Thomson)

Ca și Democrit, marele chimist Dalton — fondatorul teoriei atomice — considera că limita de divizibilitate a substanței este atomul. În 1833, Faraday descoperă fenomenul de electroliză, de unde găsește că pentru a depune la catod un echivalent gram din orice substanță este nevoie de aceeași sarcină electrică  $F = 96\,490$  coulombi, constantă, numită numărul lui Faraday. Rezultă că pentru a depune la catod un atom gram de substanță monovalentă sînt

necesari  $F$  coulombi, pentru una bivalentă sînt necesari  $2F$  coulombi etc.

Cum într-un atom gram din orice substanță sînt  $N = 6,025 \times 10^{23}$  atomi, rezultă că în medie fiecare ion monovalent va transporta sarcina

$$e = \frac{F}{N} = \frac{96\,490}{6,025 \times 10^{23}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ coulombi.}$$

Un ion bivalent va transporta o sarcină de două ori mai mare etc. Acestei sarcini elementare, în 1874, Stoney îi dă numele de electron.

O dată cu descoperirea radioactivității naturale în 1895 și a dovedirii că aceasta este un fenomen subatomic, s-a pus problema structurii atomului. Dat fiind faptul că substanța este în general neutră din punct de vedere electric și întrucît electronii negativi s-au dovedit a fi constituenți ai atomilor, rezultă clar că atomul trebuie să conțină și purtători de sarcină electrică pozitivă. Așadar, era vorba de o structură electrică a atomului.

Primul model de atom a fost propus de W. Thomson (Lord Kelvin) în 1902. Conform acestui model, sarcina pozitivă a atomului este uniform distribuită în interiorul atomului, iar electronii se dispun sub forma unor straturi concentrice. Practic, atomul era reprezentat ca o „picătură” sferică, compusă dintr-o substanță încărcată pozitiv, înăuntrul căreia erau „scufundați” electronii, al căror număr era atît de mare, încît anulau sarcina pozitivă a atomului. Este așa-numitul atom tip „cozonac cu stafide”.

Începînd cu 1903, J. J. Thomson dezvoltă acest model, considerînd că sarcina pozitivă este, de asemenea, uniform distribuită în interiorul volumului ce delimitează dimensiunea atomului, însă datorită forțelor evasielastice, electronii oscilează în jurul unei poziții de echilibru. Acest model de atom are totuși un caracter static. Stabilitatea atomului este asigurată de egalitatea forței electrostatice de interacțiune dintre electroni și elementele de volume încărcate pozitiv, cu forța evasielastică,

$$F = \frac{-e e'}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} = -K r,$$

unde  $r$  este distanța dintre punctul A, în care se află elec-

tronul și centrul sferei, iar  $-e$  și  $e'$  sînt sarcina electronului și, respectiv, sarcina pozitivă a atomului (fig. 6.1).

Datorită acestor oscilații, atomul ar emite în spațiul înconjurător radiații electromagnetice. În acest mod s-ar explica emisia și absorbția luminii de către atom, deci a liniilor spectrale.

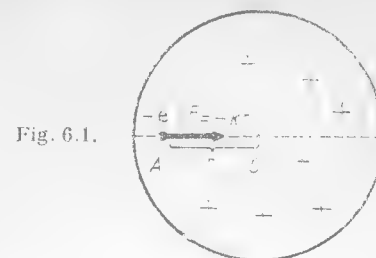


Fig. 6.1.

Deși modelul de atom propus de J. J. Thomson a jucat un rol pozitiv în istoria științelor, modelul are un caracter artificial, întrucît atribuie sarcinilor pozitive și negative naturi diferite. Și anume, sarcinile pozitive sînt considerate ca avînd o distribuție continuă, în timp ce sarcinile negative ar avea o distribuție granulară. În același timp, deși cu ajutorul acestui model s-a dat o explicație originii liniilor spectrale, valorile experimentale ale frecvențelor acestor linii nu coincideau cu cele calculate. Toate aceste fapte au cerut înlocuirea modelului cu altul mai perfecționat.

### 6.1.2. Modelul atomic planetar (Rutherford)

Problema verificării ipotezelor lui J. J. Thomson cu privire la structura atomului a preocupat pe mulți oameni de știință, la începutul secolului al XX-lea. Trimițînd fascicule de electroni prin foițe subțiri, confecționate din diferite substanțe, Lenard (1903) găsește că electronii pot străbate un număr mare de atomi, fără să fie deviați de la traiectoria inițială. El ajunge astfel la concluzia că sarcina pozitivă a atomului nu este uniform distribuită în întreg atomul, ci are și ea o structură granulară. Lenard a constatat că electronii străbat foița metalică fără să sufere o deviație apreciabilă. Aceasta a condus la ideea că sarcina electrică pozitivă a atomului nu este dispersată continuu, ca în modelul lui Thomson, ci este concentrată în centrul atomului.



În 1911 Rutherford sondează interiorul atomilor cu ajutorul particulelor alfa, emise de substanțele radioactive, plecând de la o serie de rezultate obținute de doi dintre colaboratorii săi, Geiger și Marsden, privitoare la difuzia radiației alfa, la trecerea ei prin substanță. Se știe că radiația alfa este formată din particule alfa, fiecare dintre acestea reprezentând un ion de heliu dublu ionizat.

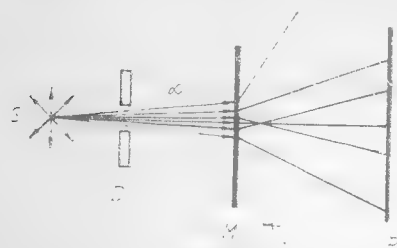


Fig. 6.2.

Schema experienței lui Rutherford este dată în figura 6.2. Particulele  $\alpha$  emise de sursa  $S$  de raze sunt difuzate de diafragma  $D$ , iar o parte cad pe difuzorul  $M$ , care poate fi, de exemplu, o foaie de aluminiu, cupru, argint sau aur. Particulele alfa, împrăștiate de  $M$  sub diferite unghiuri față de direcția inițială, vor ajunge pe placa fotografică  $P$ , care le va înregistra. În toate experiențele, aproape toate particulele au trecut prin foaia metalică și numai unele au fost deviate. Aceasta arată că atomul are o structură spațială, adică există în atom spații libere prin care au putut trece particulele  $\alpha$ . Pe de altă parte, o mică parte din particulele  $\alpha$  inițiale au fost difuzate sub unghiuri mai mari de  $90^\circ$ , adică au fost reflectate înapoi spre sursă. Aceasta sugerează faptul că în interiorul atomului există o mică parte, încărcată cu o sarcină pozitivă, astfel că sarcina electrică totală a atomului luat ca un întreg este egală cu zero. Această parte a fost numită nucleu. În figura 6.3 este reprezentat modul în care apare difuzia particulelor  $\alpha$  prin nucleu în cadrul modelului Thomson (a) și în cadrul modelului lui Rutherford (b).

Noile experiențe ale lui Rutherford au arătat că nucleul se află în centrul atomului, în care este concentrată întreaga sarcină pozitivă a atomului și aproape întreaga sa masă. Astfel, dacă diametrul atomului este de circa  $10^{-10}$  m, diametrul nucleului este de ordinul  $10^{-15}$  m. În același timp, electronii atomului sînt distribuiți în

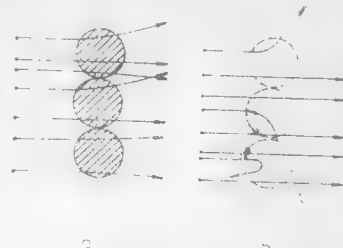


Fig. 6.3.

jurul nucleului pozitiv într-un volum relativ mare, în comparație cu volumul nucleului.

Evident, acești electroni nu pot fi imobili, întrucît datorită atracției electrostatice ar cădea pe nucleu. Astfel Rutherford a presupus că electronii efectuează o mișcare de rotație în jurul atomului. În acest fel, modelul de atom a lui Rutherford — numit și modelul nuclear al atomului — are imaginea sistemului solar, nucleul pozitiv jucînd rolul soarelui iar electronii, mai mulți sau mai puțini, se rotesc în jurul nucleului, ca și planetele în jurul soarelui. Această ipoteză a fost perfect confirmată de o serie de fapte experimentale, permițînd evaluarea sarcinii pozitive a nucleului și a legii de împrăștiere a particulelor.

Să explicăm mai îndeaproape difuzia particulelor alfa, reliefind totodată și alte concluzii care s-au desprins din aceste experiențe.

Fie deci o particulă  $\alpha$  care se apropie de nucleul  $D$  din direcția  $B$  (fig. 6.4). Particula  $\alpha$  are sarcina  $Ze$ , masa  $m$  și viteza  $v_0$ . Între nucleul încărcat cu sarcina  $Ze$  și

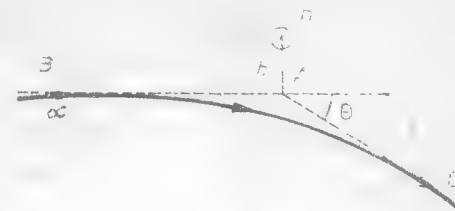


Fig. 6.4.

particula  $\alpha$  încărcată cu sarcina  $Ze$  se manifestă forța de respingere electrostatică

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze(Z'e)}{r^2} = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (6.1)$$

unde  $r$  este distanța la un moment dat dintre particula  $\alpha$  și nucleu (s-a presupus că interacțiunea are loc în aer, deci  $\epsilon_r = 1$ ).

Distanța  $b = DA$  la care particula  $\alpha$  ar trece față de nucleu dacă n-ar acționa forța de respingere, se numește parametru de ciocnire.

Din mecanică știm că traiectoria particulei care se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale, invers proporțională cu pătratul distanței, este o curbă de ordinul doi,

cu focarul în centrul de acțiune al forței. În cazul forței de respingere, această curbă este o hiperbolă, astfel încît între unghiul de difuzie și parametrul de ciocnire  $b$  există relația

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = b \frac{mv^2}{2Ze^2}. \quad (6.2)$$

Dependența traiectoriei particulei  $\alpha$  de mărimea parametrului de ciocnire este ilustrată în figura 6.5. Din (6.2) rezultă că unghiul de difuzie al particulelor  $\alpha$  va fi cu atît mai mare, cu cît ea va trece mai aproape de nucleu și cu cît va fi mai mică energia sa cinetică.

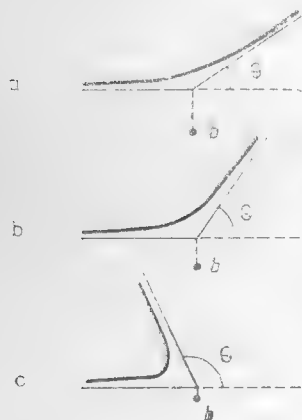


Fig. 6.5.

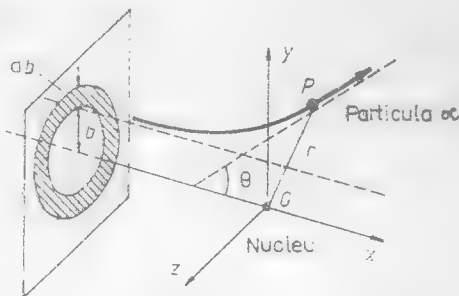


Fig. 6.6.

Relația de mai sus nu se poate verifica prin experiențe directe, întrucît parametrul de ciocnire nu este o mărime direct măsurabilă. Un rezultat verificabil experimental se obține dacă, în locul unei singure particule, se folosește un fascicul de particule  $\alpha$ . Fie deci un asemenea fascicul, dirijat perpendicular pe o foiță metalică de grosime  $d$ , conținînd  $n$  atomi în unitatea de volum, astfel încît o particulă  $\alpha$  este difuzată o singură dată.

Deoarece parametrii de ciocnire ai particulelor  $\alpha$  din fascicul sînt diferiți, rezultă că și unghiurile de difuzie vor fi diferite. Să determinăm care este numărul de particule  $\alpha$  difuzate sub unghiuri cuprinse între  $\theta$  și  $\theta + d\theta$ . Notăm cu  $N_0$  numărul de particule care cad perpendicular pe suprafața de un  $\text{cm}^2$  a foiței metalice.

Presupunînd că difuzia particulelor  $\alpha$  este determinată de un singur atom din foița metalică, vor fi difuzate, după unghiul cuprins între  $\theta$  și  $\theta + d\theta$ , toate particulele care trec prin suprafața inelului hașurat, trasat în jurul atomului  $O$  ca centru, avînd raza  $b$  și grosimea  $db$  (fig. 6.6). Numărul de particule difuzate sub unghiuri cuprinse între  $\theta$  și  $\theta + d\theta$  este egal cu produsul dintre  $N_0$  și suprafața inelului,

$$dN_0 = N_0 2\pi b \cdot db. \quad (6.3)$$

Introducînd în această relație produsul  $b db$  din (6.2), rezultă

$$dN_0 = N_0 2\pi \left( \frac{2Ze^2}{mv^2} \right)^2 \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{d\theta}{2}. \quad (6.4)$$

Acest număr de particule se dispun pe suprafața unei zone sferice, hașurată în figura 6.7,

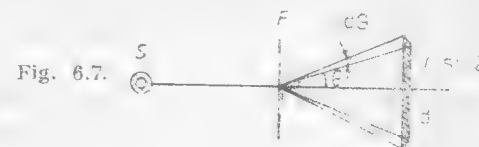


Fig. 6.7.

$$dS = r d\theta 2\pi r \sin \theta = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta.$$

Numărul de particule  $\alpha$  difuzate într-un unghi solid egal cu unitatea ( $r = 1$ ) va fi

$$N_0 = \frac{dN_0}{dS}$$

și deci, prin integrarea relației (6.4), se obține

$$\frac{N_0}{N_0} = \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

unde raportul  $N_0/N_0$  reprezintă probabilitatea ca o particulă  $\alpha$  să fie difuzată sub unghiul  $\theta$ .

Considerind că foița metalică prin care trec particulele  $\alpha$  are grosimea  $d$  și conține  $n$  atomi în unitatea de volum, se obține relația

$$N_0 = N_0 n d \left( \frac{Ze^2}{mv^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (6.5)$$

numită formula de împrăștiere a lui Rutherford.

Cu ajutorul acestei relații, considerind că ipoteza atomului nuclear este adevărată, Rutherford ajunge la următoarele concluzii :

1) toată sarcina pozitivă a atomului și aproape întreaga sa masă este concentrată în nucleul atomului, ale cărui dimensiuni sînt de ordinul a  $10^{-15}\text{m}$  ;

2) legea lui Coulomb, descoperită pentru cazul interacțiunilor electrice macroscopice, este valabilă și în cazul interacțiunilor microscopice, la nivelul atomului ;

3) numărul de particule  $\alpha$  difuzate de o foița metalică este proporțional cu :

- numărul inițial  $N_0$  de particule  $\alpha$ ,
- grosimea  $d$  a materialului difuzant,
- inversul pătratului energiei potențiale a particulei  $\alpha$ ,
- pătratul sarcinii nucleului sau  $(Ze)^2$ ,
- inversul lui  $\sin^4 \theta/2$ .

Experiențele efectuate au arătat că rezultatele concordă bine cu teoria lui Rutherford, numai pentru cazurile cînd foița difuzantă era confecționată din metale mai grele, iar viteza particulelor  $\alpha$  nu era prea mare.

Într-adevăr, dacă foița difuzantă era formată din atomi mai ușori, iar energia particulelor  $\alpha$  era suficient de mare, s-a constatat că unghiurile de difuzie devin mari, iar formula de împrăștiere nu se mai verifică. Aceste observații au fost explicate considerind că în aceste cazuri particulele  $\alpha$  avînd posibilitatea să treacă mult mai aproape de nucleu decît în primul caz, în afară de forța de respingere electrostatică, apar forțe noi, de altă natură decît cele electrostatice, care au fost numite mai tîrziu, forțe nucleare.

Un succes deosebit al acestui model a constatat în faptul că a făcut posibil calcularea mărimei sarcinii  $Ze$  a nucleelor unor elemente. În acest fel, Chadwick, un colaborator a lui Rutherford, folosind relația (6.5) găsește pentru cupru  $Z = 29,3$ , pentru argint  $Z = 46,6$ , iar pentru platină  $Z =$

$= 77,4$ , apropiate de valorile 29 ; 47 și 78 ale numerelor de ordine ale elementelor respective din tabelul periodic al elementelor.

### 6.1.3. Modelul atomic cuantic al lui Bohr

Deși cu ajutorul modelului de atom al lui Rutherford s-a făcut un salt calitativ în explicarea unor fapte experimentale, totuși modelul ca atare nu putea fi pus în acord cu teoriile electrodinamicii clasice. În modelul planetar al atomului, stabilitatea acestuia este asigurată de faptul că forța electrostatică de respingere dintre nucleu și electroni este echilibrată de forța centrifugă de rotație a electronilor.

Electrodinamica clasică însă afirmă că orice particulă încărcată electric aflată în mișcare de rotație, fiind continuu accelerată, emite continuu energie sub formă de radiații. Dar aceasta înseamnă că atomul emite continuu radiații, avînd drept rezultat scăderea energiei electronului și deci în final „căderea” electronului pe nucleu, într-un timp de ordinul  $10^{-9}$  s. Aceasta ar însemna că mișcarea electronului să se facă pe o traiectorie sub formă de spirală, cu raza din ce în ce mai mică, iar spectrele de emisie ale atomilor diferitelor elemente să fie spectre continue.

Toate faptele experimentale arată însă că, în general, atomii elementelor sînt stabili, iar spectrele de emisie sînt spectre de linii, cu frecvențe bine stabilite. Aceasta înseamnă că emisia de radiații de către atomi nu are loc la întîmplare și deci la scara microcosmosului trebuie folosite legi noi, care să reflecte realitatea.

Pentru înlăturarea acestor dificultăți, Niels Bohr (1913) a procedat la tratarea modelului de atom a lui Rutherford prin prisma concepțiilor noi, ale teoriei cuantice a lui Planck, care presupune că radiațiile sînt emise sau absorbite de sistemele atomice în cantități discrete, multipli ale cuanței de acțiune :  $\epsilon = h\nu$ ,  $h$  fiind constanta lui Planck, iar  $\nu$  — frecvența de emisie.

Pentru explicarea noilor fapte experimentale, Bohr, a formulat două postulate :

1. *Postulatul mecanic sau postulatul despre stările staționare* afirmă că atomii pot exista un timp mai îndelungat numai aflîndu-se în anumite stări, numite stări staționare. În aceste stări, energia rămîne constantă, deoarece nici nu se emite, nici nu se absoarbe radiație. Fiecare dintre

aceste stări este caracterizată de o anumită valoare a energiei, astfel încât energiile diferitelor stări ale aceluiași atom formează un șir discret  $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$ .

2. *Postulatul optic sau condiția de frecvență* afirmă că la trecerea dintr-o stare staționară în altă stare staționară atomii emit sau absorb radiații numai pentru frecvențe strict determinate. Radiația emisă sau absorbită la trecerea atomilor din starea staționară cu energia  $W_2$  în starea staționară cu energia  $W_1$  ( $W_2 > W_1$ ) are loc pentru frecvența  $\nu$ , dată de relația

$$h\nu = W_2 - W_1. \quad (6.6)$$

Verificarea experimentală a primului postulat a lui Bohr a fost realizată încă în 1913 de Frank și Hertz. Se știe că atomii care au un surplus de energie se află într-o stare excitată. Ei nu rămân în starea excitată, ci au tendința de a reveni în starea normală, neexcitată, emițând un foton a cărui energie este egală cu variația energiei electronului (fig. 6.8). Radiația formată din fotonii astfel emiși se numește radiație de rezonanță.



Fig. 6.8.

Una dintre metodele de aducere a atomilor în stare excitată se realizează prin bombardarea acestora de către electronii accelerați, datorită unei diferențe de potențial  $U$ . În cazul în care prin ciocnirea cu atomii, electronii accelerați pierd energie, pe care o absoarbe atomul ciocnit, are loc o ciocnire neelastică. Dacă energia electronilor accelerați este suficient de mare, poate avea loc ionizarea atomilor ciocniți, prin îndepărtarea unuia din electronii exteriori, atomii respectivi devenind ioni pozitivi. Valoarea tensiunii acceleratoare  $U$  din acest caz se numește potențial de ionizare.

Postulatul stărilor staționare este verificat prin experiența lui Frank și Hertz, redată în figura 6.9, folosindu-se așa-numita metodă a potențialului întârziator. Dispozitivul este format dintr-un tub de descărcare, prevăzut cu catodul  $C$ , grila  $S$  și anodul  $A$ , în interior aflându-se vapori de mercur, la presiunea de

circa un torr. Electronii eliberați de catodul  $C$  sunt accelerați între  $C$  și grila  $S$  care are potențialul  $U$ , pozitiv față de  $C$ . Energia fiecărui electron crește cu

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

unde  $eU$  este mărimea lucrului câmpului electric.

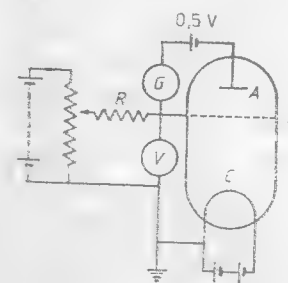


Fig. 6.9.

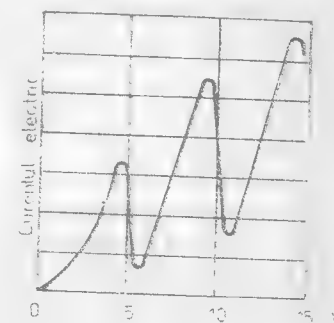


Fig. 6.10.

Reglind diferența de potențial  $U$ , se poate obține un fascicul de electroni de o anumită energie. Dacă în urma ciocnirii cu atomii de mercur, electronii nu-și variază energia, ei vor ajunge la anod și vor fi înregistrați de galvanometrul  $G$ . Atunci când tensiunea acceleratoare devine 4,9 V, se constată o scădere bruscă a curentului electric înregistrat de  $G$ , chiar dacă  $U$  crește în continuare. Același fenomen se întâmplă pentru  $U$  egal cu 9,8 V; 14,7 V etc. (fig. 6.10).

Ce s-a întâmplat în aceste situații? Scăderea bruscă a curentului electric, înseamnă că electronii n-au mai ajuns la anod spre a fi înregistrați de  $G$ . În drumul lor, electronii s-au ciocnit neelastic cu atomii de mercur, le-au cedat acestora energie, iar energia rămasă fiecărui electron a devenit insuficientă pentru trecerea prin spațiul  $SA$ , grila  $S$  fiind la un potențial cu aproximativ + 0,5 V mai mare decât a anodului  $A$ . Aceasta înseamnă că electronii având energia mai mică decât 0,5 eV, vor fi captați de grila  $S$ .

Faptul că prima scădere a curentului electric are loc când electronii ajung la energia de 4,9 eV, arată că în acest moment, între electronii și atomii de mercur au avut loc ciocniri neelastice, în apropiere de  $S$ . A doua scădere, corespunzătoare energiei de 9,8 eV, înseamnă că fiecare elec-

tron a ciocnit neelastic de două ori atomii de mercur etc. Se observă că în toate cazurile atomii de mercur își pot varia energia numai cu multipli întregi ai valorii de 4,9 eV. Dar aceasta înseamnă că energia atomului de mercur poate lua valorile

$$W_1; W_1 + 4,9 \text{ eV}; W_1 + 2 \cdot 4,9 \text{ eV}; W_1 + 3 \cdot 4,9 \text{ eV}; \dots$$

care formează un șir discret de valori pe care le poate avea atomul în diferitele stări staționare,  $W_1$  fiind energia atomului de mercur în stare neexcitată.

Valabilitatea celui de al doilea postulat a lui Bohr a fost verificată studiind spectrele de emisie și absorbție ale atomului de hidrogen, care a constituit de altfel și cheia stabilirii postulatelor respective.

Conform teoriei lui Bohr, atomul de hidrogen este format din nucleul încărcat cu sarcina  $+e$  și electronul având sarcina  $-e$ , acesta din urmă rotindu-se pe o orbită circulară în jurul nucleului (fig. 6.11). Între electron și nucleu se manifestă forța coulombiană  $F$ . Acestor prezumții, considerate ca fiind clasice, Bohr le alătură cele două postulate, ceea ce de fapt înseamnă că a aplicat teoria cuantică modelului de atom a lui Rutherford.

Problema care se punea, era de a afla care sînt orbitele permise ale electronului care corespund stărilor staționare.

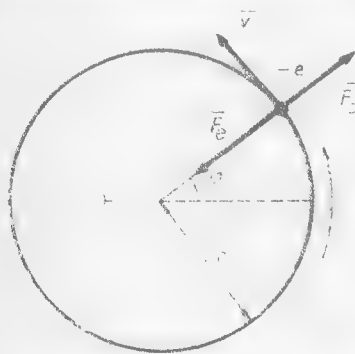


Fig. 6.11.

Cu alte cuvinte, trebuia găsite care sînt valorile energiilor atomului, aflat în stare staționară. Problema a fost rezolvată prin formularea condiției de selecție a stărilor staționare.

Conform mecanicii clasice, se poate admite o infinitate de orbite pentru electronul aflat în rotație în jurul nucleu-

lui. Într-adevăr, folosind faptul că stabilitatea sistemului nucleu-electron este dată de echilibrul dintre forța electrostatică de atracție și forța centrifugă de inerție,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (6.7)$$

se obține o ecuație cu necunoscutele  $r$  și  $v$ , care admite deci o infinitate de soluții.

Metoda alegerii orbitelor permise pentru electronul din atom este dată de așa-numita condiție cuantică a lui Bohr care reprezintă de fapt însăși generalizarea ideii de cuantificare a lui Planck, extinsă la mișcarea electronului din atom. Pentru formularea acestei condiții, considerăm că starea sistemului nucleu-electron poate fi descrisă cu ajutorul unor parametri numiți coordonate generalizate. În cazul mișcării pe un cerc, coordonata generalizată este unghiul polar  $\varphi$  (fig. 6.11). Acestei coordonate îi corespunde un impuls generalizat,

$$p_\varphi = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}},$$

unde  $W_c$  este energia cinetică a electronului, iar  $\dot{\varphi} = \partial \varphi / \partial t$ .

Pentru determinarea lui  $p_\varphi$ , exprimăm pe  $W_c$  în coordonate polare,

$$W_c = \frac{mv^2}{2}, \text{ unde } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi},$$

$r$  fiind raza traiectoriei, iar  $ds$  porțiunea de curbă parcursă de electron în timpul  $dt$ .

Rezultă

$$p_\varphi = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = m v r,$$

unde  $m v r$  este impulsul generalizat, egal cu momentul cinetic orbital al electronului ce se mișcă pe o orbită circulară de rază  $r$ .

Cum însă

$$p_\varphi d\varphi = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}} \cdot d\varphi = \frac{dW_c}{d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)} \cdot d\varphi,$$

înseamnă că produsul  $p_\varphi d\varphi$  are dimensiunea energie · timp, deci o acțiune.

Conform teoriei cuantice a lui Planck, orice acțiune este un multiplu al cuantei de acțiune  $h$  și deci

$$\oint p_\varphi d\varphi = nh,$$

unde  $n$  este un număr întreg, iar  $\oint$  reprezintă integrala pe conturul închis, care este chiar orbita circulară. Întrucât la mișcarea pe un cerc,  $p_\varphi = mvr = \text{const}$ , mărimile  $m, v$  și  $r$  fiind mărimi constante, rezultă că

$$p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = mvr \cdot 2\pi = nh.$$

Bohr consideră că sînt permise numai acele orbite pentru care momentul cinetic orbital al electronului este

$$p_\varphi = mvr = n \frac{h}{2\pi}, \quad (6.8)$$

unde  $n$  este numărul cuantic și care i-a valorile  $n = 1, 2, 3, \dots$  pentru orbite succesive.

Eliminînd pe  $v$ , din relațiile (6.7) și (6.8), se obține

$$r = n^2 \cdot \frac{(4\pi\epsilon_0)h^2}{4\pi^2 m e^2}.$$

Înlocuind valorile diferitelor constante, se obține pentru raza primei orbite a lui Bohr ( $n = 1$ ), valoarea  $r_1 = 0,529 \text{ \AA}$ , astfel că diametrul atomului ar fi de  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ , în bună concordanță cu valoarea estimată din teoria cinetico-moleculară. Raza  $r_n$  a unei orbite permise oarecare, avînd numărul cuantic  $n$ , este

$$r_n = n^2 r_1,$$

ceea ce arată că razele orbitelor succesive cresc proporțional cu pătratele numerelor întregi.

Întrucît nici valoarea razei permise și nici a vitezei electronului nu pot fi determinate direct experimental, verificarea teoriei lui Bohr s-a făcut, așa după cum s-a arătat mai sus, studiind spectrele de emisie și absorbție ale atomului de hidrogen. În acest scop se determină cu

foarte mare precizie mai întîi variația energiei emise sau absorbite de atomii de hidrogen, din măsurătorile spectrale.

Studiind succesiunea liniilor spectrale din spectrul vizibil al hidrogenului, Balmer găsește în 1885 o relație empirică de forma

$$\bar{\nu} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (6.9)$$

În această relație  $\bar{\nu} = 1/\lambda$  este numărul de undă (care arată câte lungimi de undă sînt pe un centimetru de lungime),  $R_H = 10,968 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$  este constanta lui Rydberg, obținută din măsurători spectroscopice, iar  $n$  este un număr întreg care caracterizează linia spectrală.

Folosind teoria sa, Bohr calculează energia stării staționare a atomului de hidrogen, considerînd că ea are două componente: energia cinetică a electronului care se rotește în jurul nucleului,

$$W_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 h^2}$$

și energia potențială de interacțiune dintre electron și nucleu,

$$W_p = - \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{r} = - \frac{4\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 h^2},$$

unde am folosit expresiile lui  $v$  și  $r$ , date de (6.7) și (6.8).

Comparînd  $W_c$  cu  $W_p$  se găsește că  $W_p = -2W_c$  și deci energia stării staționare a celei de  $n$ -a orbite este

$$W_n = W_c + W_p = -W_c = - \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 h^2}. \quad (6.10)$$

Energia stării staționare apare negativă, deoarece se consideră că două sarcini aflate la infinit una de alta au energia potențială egală cu zero. Pe măsură ce electronul se apropie de nucleu, sistemul nucleu-electron își variază energia emițînd radiații. Energia potențială devine mai mică decît zero, în timp ce energia cinetică crește. Creșterea energiei cinetice este însă mai lentă decît scăderea energiei potențiale, motiv pentru care energia stării staționare este negativă. Valoarea negativă a energiei stării staționare arată că la formarea atomului respectiv, ener-



gia sa internă scade, formarea fiind însoțită de degajare de energie.

Starea staționară pentru care  $n = 1$  se numește stare fundamentală și este starea cea mai stabilă a sistemului. Acestei stări îi corespunde energia

$$W_1 = -\frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2},$$

în timp ce celelalte stări au energiile  $W_n = n^2 W_1$ .

Conform postulatului al doilea a lui Bohr, frecvența luminii emise de atom, la saltul electronului de pe orbita  $n_2$  pe orbita  $n_1$ , este dată de relația

$$h\nu = W_2 - W_1 = -\frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

iar numărul de undă ( $\bar{\nu} = 1/\lambda = \nu/c$ ) este

$$\bar{\nu} = \frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 c \hbar^3} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

sau

$$\bar{\nu} = R_H \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (6.11)$$

unde  $R_H$  este constanta lui Rydberg. În toate cazurile  $n_2 > n_1$ .

Se observă de fapt că a fost regăsită pe cale teoretică formula empirică (6.9) a lui Balmer. În plus, calculându-se  $R_H$  din relația

$$R_H = \frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 c \hbar^3} = 10,974 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1},$$

s-a găsit o valoare foarte apropiată de aceea, rezultată din măsurători spectroscopice. Aceste două fapte, regăsirea pe cale teoretică a formulei empirice a lui Balmer și calcularea constantei lui Rydberg, a reprezentat un mare succes al teoriei lui Bohr.

Teoria lui Bohr a dat un sens fizic clar liniilor spectrale, explicând mecanismul emisie și absorbției luminii de către atomi. Liniile spectrale reprezintă radiații monocromatice care apar ca rezultat al trecerii atomului dintr-o stare excitată oarecare într-o altă stare mai puțin excitată. Așa de exemplu, în partea vizibilă a spectrului

hidrogenului, există un număr de linii ce formează seria Balmer, dintre care patru sînt mai intense: linia roșie ( $H_\alpha$ ), linia verde-albastru ( $H_\beta$ ), și două linii violete ( $H_\gamma$ ,  $H_\delta$ ).

Plecînd de la această interpretare, formula (6.11) sugerează faptul că în afara de seria Balmer, pentru care  $n_1 = 2$ , există și alte serii spectrale, caracterizate fiecare prin intervalul de frecvență în care se află, corespunzînd lui  $n_1 = 1, n_1 = 3, n_1 = 4, n_1 = 5$  etc.

Aceste serii au fost descoperite de Lyman în domeniul ultraviolet al spectrului hidrogenului și Paschen, Bracket și Pfund în infraroșu, relația (6.11) fiind valabilă și pentru aceste serii, motiv pentru care se numește formula generalizată a lui Balmer.

În această formulă numărul  $n_1$  caracterizează seria spectrală, iar  $n_2$  caracterizează linia spectrală. De asemenea, se obișnuiește ca termenul  $1/n_1^2$  să se numească termen fundamental, acesta păstrînd o valoare constantă în cadrul unei serii spectrale, iar termenul  $1/n_2^2$  — termen curent, variînd de la o linie la alta, în cadrul aceleiași serii.

În figura 6.12 este reprezentat așa-numitul model spațial al atomului de hidrogen și mecanismul de emisie

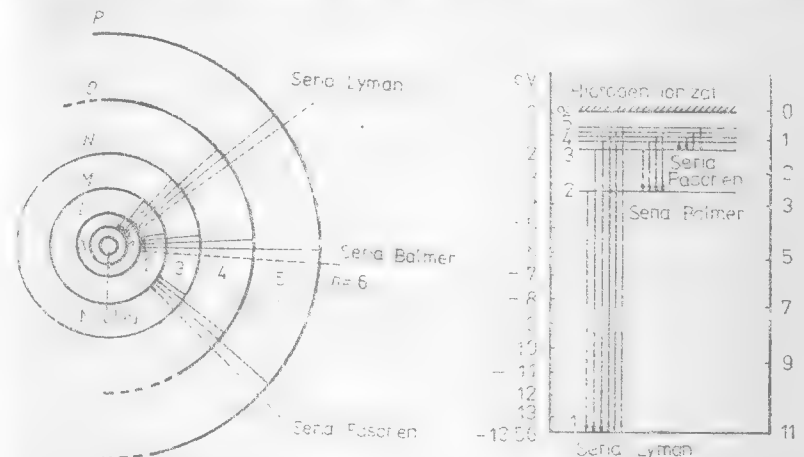


Fig. 6.12.

Fig. 6.13.

al liniilor diferitelor serii spectrale. În mod curent stările staționare se notează cu literele K, L, M, N, O, P, în ordinea depărtării de nucleu. Toate tranzițiile care se

fac de pe stările superioare pe starea  $K$  formează seria Lyman, tranzițiile pe starea  $L$  formează seria Balmer etc.

În figura 6.13 tranzițiile electronice ale atomului de hidrogen sînt reprezentate cu ajutorul nivelelor energetice. Prin nivel energetic înțelegem valoarea energiei pe care o posedă un atom aflat într-o anumită stare staționară, fiecărei stări staționare, corespunzându-i o valoare unică și bine determinată a energiei. În figură sînt date valorile nivelelor energetice, numerele cuantice și numerele de undă corespunzătoare.

În acord cu cele spuse mai înainte, valorile tuturor nivelelor energetice sînt negative. Pentru a scoate electronul aflat pe primul nivel energetic din atomul de hidrogen, trebuie cheltuită energia

$$W_{\infty} - W_1 = h\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{\infty} \right)$$

sau

$$h\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2} = 13,56 \text{ eV}$$

și reprezintă energia de ionizare a atomului de hidrogen. Această valoare coincide cu cea calculată prin alte metode.

Teoria lui Bohr pentru atomul de hidrogen se aplică, cu unele considerente suplimentare și atomilor hidrogenoizi, adică sistemelor atomice compuse dintr-un nucleu cu sarcina  $+Ze$  și un electron, de exemplu  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$  etc. Așa, de exemplu, pentru  $\text{He}^+$ , relația (6.11) se scrie

$$\overline{\nu}_{\text{He}} = 4R_{\text{He}} \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 5, 6, 7, \dots,$$

unde  $R_{\text{He}}$  este constanta lui Rydberg pentru heliu. Faptele experimentale arată că spectrul heliului o dată ionizat este compus dintr-un număr de linii care formează seria Pickering.

Pentru punerea de acord a rezultatelor experimentale obținute în cazul atomilor hidrogenoizi cu teoria lui Bohr, trebuie să se țină seama, printre altele, de dependența relativistă a masei electronului de viteză, de mișcarea nucleului și chiar de mișcarea sistemului nucleu-electron, în jurul centrului de greutate comun. Ținînd seama, de exemplu, de mișcarea nucleului din atom și de dependența

constantei lui Rydberg de masa nucleului, a fost posibilă descoperirea izotopului hidrogenului, numit deuteriu.

În sfîrșit, fără a micșora pasul important făcut, trebuie să arătăm că teoria lui Bohr are o serie de limite și de contradicții de nerezolvat în cadrul acestei teorii. Așa, de exemplu, Bohr a folosit modelul planetar al atomului fără să explice de ce electronul nu emite radiații în mișcarea sa pe orbită, conform teoriei electromagnetice clasice, a lui Lorentz. De asemenea, nu există nici un fel de bază teoretică care să permită suprapunerea condiției cuantice peste modelul clasic al atomului.

Toate aceste fapte conduc la ideea că teoria lui Bohr nu este nici consecvent clasică și nici consecvent cuantică, fiind pătrunsă de o contradicție internă chiar în ce privește bazele ei. Această concluzie l-a determinat pe fizicianul W. G. Bragg să afirme în glumă că „în teoria lui Bohr, luna, miercurea și vinerea se folosesc legile mecanicii clasice, iar marțea, joia și sîmbăta se folosesc legile cuantice”.

Toate aceste imperfecțiuni și limite ale teoriei lui Bohr au constituit punctul de plecare spre noi cercetări, spre noi modele ale atomului, care să apropie mai mult teoria de faptele observate experimental.

#### 6.1.4. Modelul atomic al lui Sommerfeld

Examinarea mai atentă, cu dispozitive spectroscopice de înaltă rezoluție, a arătat că unele linii din spectrul hidrogenului nu sînt linii simple, ci au o structură complexă, fiind formate dintr-o serie de linii apropiate. Așa, de exemplu, Michelson și Morley au arătat că linia  $H_\alpha$  a hidrogenului este formată din trei linii, din care două mai intense și alta mai slabă. Fenomenul poartă numele de structură fină a liniilor hidrogenului.

Faptul experimental observat era în contradicție cu teoria lui Bohr care arăta că fiecărui salt al electronului, de pe un nivel energetic pe altul, îi corespunde o singură linie spectrală.

Această complexitate a liniilor spectrale, incompatibilă cu numărul de nivele energetice prevăzute de teoria lui Bohr, l-a determinat pe Sommerfeld să considere pentru electron, în afară de orbita circulară și orbite eliptice. Ipoteza sa era conformă cu legile mecanicii clasice care

arată că traiectoria corpului care se mișcă sub influența unei forțe centrale este de fapt o elipsă, orbita circulară fiind un caz particular.

Noul model al atomului, propus de Sommerfeld, admite că electronul se învîrte în jurul nucleului pe o orbită eliptică care are nucleul în unul din focare (fig. 6.14). Pentru

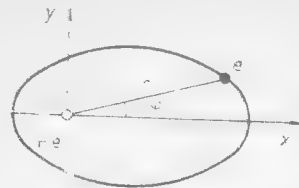


Fig. 6.14.

definirea mișcării electronului pe o elipsă sînt necesare două coordonate generalizate: unghiul polar  $\varphi$  și raza vectorială  $r$ , cărora le corespund două condiții cuantice,

$$\oint p_{\varphi} d\varphi = n_{\varphi} h,$$

$$\oint p_r dr = n_r h,$$

unde  $n_{\varphi}$  și  $n_r$  sînt numărul cuantic azimutal, respectiv radial, iar  $p_{\varphi}$  și  $p_r$  sînt impulsurile generalizate sau momentele cinetice corespunzătoare.

Ca și în cazul cuantificării circulare,  $p_{\varphi}$  și  $p_r$  se determină din relațiile

$$p_{\varphi} = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}} \text{ și } p_r = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{r}},$$

unde  $\dot{\varphi} = \partial \varphi / \partial t$ , iar  $\dot{r} = \partial r / \partial t$ .

Pentru examinarea energiei cinetice, se observă că

$$x = r \cos \varphi \text{ și } y = r \sin \varphi$$

și deci

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Întrucît

$$W_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

rezultă

$$p_{\varphi} = m r^2 \dot{\varphi}, \text{ iar } p_r = m r \dot{r}.$$

Cele două condiții cuantice se vor scrie astfel

$$\oint m r^2 \dot{\varphi} d\varphi = n_{\varphi} h, \quad (6.12)$$

$$\oint m r \dot{r} dr = n_r h.$$

Din prima condiție de cuantificare, rezultă

$$\int_0^{2\pi} m v r d\varphi = n_{\varphi} h \text{ sau } p_{\varphi} = m v r = n_{\varphi} \frac{h}{2\pi},$$

care coincide cu condiția (6.8) a lui Bohr de la cuantificarea pe un cerc, cu specificarea că  $n_{\varphi}$  coincide ca sens fizic cu numărul  $n$  din condiția amintită.

Studiul celei de a doua din condițiile de cuantificare, de mai sus, dă pentru starea staționară energia

$$W = - \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi \epsilon_0)^2 n^2 h^2},$$

identică cu relația (6.10) din teoria lui Bohr, cu specificarea că aici

$$n = n_{\varphi} + n_r, \quad (6.13)$$

unde  $n$  se numește număr cuantic principal.

Folosind aceste date, să determinăm care sînt orbitele posibile ale electronului, corespunzătoare unui anumit număr cuantic principal  $n$ . Pentru aceasta să observăm că  $n_{\varphi}$  intră în compunerea lui  $n$  ca termen. Valoarea  $n_{\varphi} = 0$  nu este posibilă, întrucît din (6.12) ar rezulta  $\dot{\varphi} = 0$  sau  $\varphi = \text{const}$ , adică mișcarea electronului s-ar face pe o dreaptă care trece prin nucleu, caz exclus de teoria lui Bohr. Valoarea  $n_r = 0$  este posibilă, întrucît aceasta înseamnă  $\dot{r} = 0$ , deci  $r = \text{const}$ , ceea ce corespunde mișcării electronului pe un cerc.

Fie, de exemplu,  $n = 3$ . Pot exista următoarele trei combinații de valori pentru perechile de numere  $n_{\varphi}$  și  $n_r$ :

$n_{\varphi} = 3$ ;  $n_r = 0$  corespunde mișcării pe un cerc;

$n_{\varphi} = 2$ ;  $n_r = 1$  și  $n_{\varphi} = 1$ ;  $n_r = 2$  corespund mișcărilor pe două elipse avînd aceeași semiaxă mare, dar excentrici-

tăți diferite (fig. 6.15). Se observă că, spre deosebire de teoria lui Bohr, unde unui număr cuantic îi corespunde o orbită circulară, în teoria lui Sommerfeld, unui număr cuantic principal  $n$  îi corespund  $n$  orbite, dintre care una este un cerc și  $n-1$  sunt elipse.

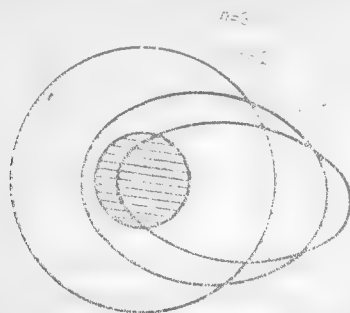


Fig. 6.15.

Din relația pentru energia stării staționare, se constată că această energie depinde de numărul cuantic principal  $n$ . Deoarece unui număr cuantic principal  $n$  îi corespund  $n$  stări cu aceeași energie, o asemenea situație se numește *degenerare*, iar stările (orbitele) respective se numesc *stări degenerate*. Stările degenerate corespunzând aceleiași energii, se deosebesc între ele prin numărul cuantic azimutal  $n_\phi$ .

În spectroscopie se folosește în loc de  $n_\phi$ , numărul cuantic secundar, definit de relația  $l = n_\phi - 1$ . Rezultă că  $l$  ia valorile  $l = 0; 1; 2; \dots; n-1$ , valoarea  $l = n-1$  este orbita circulară, iar  $l = 0$  este ultima orbită eliptică. Se observă, de asemenea, că  $n = n_r + l + 1$ .

Totalitatea stărilor dintr-un atom care au aceeași energie formează o familie de stări, iar electronii de pe aceste stări formează o pătură de electroni. În acest fel, numărul cuantic principal  $n$  caracterizează pătură de electroni, determinând nivelul energetic al păturii respective. În același timp, numărul cuantic secundar  $l$  deosebește o stare degenerată (numită și substrat sau subpătură) de alta, în cadrul aceleiași pături de electroni.

În spectroscopie, fiecare pătură de electroni, caracterizată printr-un anumit număr cuantic principal, se notează cu litere, astfel:  $n = 1$  pătura  $K$ ,  $n = 2$  pătura  $L$ ,  $n = 3$  pătura  $M$  etc., în timp ce subpăturile dintr-o pătură se notează cu litere astfel:

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$s, p, d, f, \dots$$

Folosind aceste notații, un nivel energetic se notează printr-un număr care are în dreapta o literă: numărul reprezintă numărul cuantic principal, iar litera reprezintă numărul cuantic secundar. De exemplu,  $1s$  înseamnă că  $n = 1$  (pătura  $K$ ) și  $l = 0$ ; pentru stratul  $L$  pot exista  $2s$  și  $2p$  corespunzătoare valorilor  $l = 0$  și  $l = 1$ .

Mișcarea electronului pe o elipsă este o mișcare plană, iar pentru descrierea sa sunt suficiente cele două coordonate generalizate  $r$  și  $\phi$ . Sub acțiunea unor câmpuri omogene exterioare, de exemplu, un câmp magnetic omogen exterior, mișcarea devine mai complicată, iar orbita eliptică are o mișcare de precesie. În acest caz pentru caracterizarea mișcării sunt necesare trei coordonate generalizate și întrucât câmpul potențial al electronului este un câmp sferic central, cele trei coordonate pot fi chiar coordonatele polare sferice: raza vectorie  $r$ , latitudinea  $\theta$  și longitudinea  $\phi$ . Între coordonatele carteziene ale unui punct  $P(x, y, z)$  și coordonatele  $r, \theta$  și  $\phi$ , există relațiile (fig. 6.16)

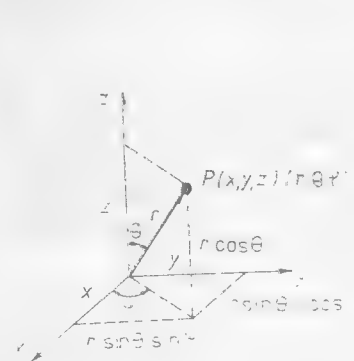


Fig. 6.16.

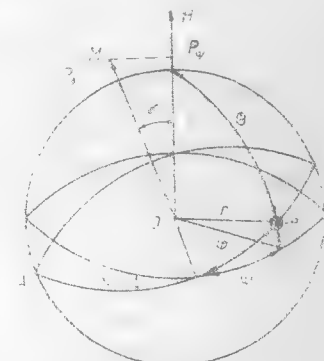


Fig. 6.17.

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

Presupunem câmpul exterior perturbator de mică intensitate, ceea ce determină ca orbita electronului să rămână o elipsă, care face un unghi  $\alpha$  cu planul ecuatorial (fig. 6.17). Fie  $OH$  direcția câmpului magnetic exterior, care reprezintă o direcție privilegiată,  $OM$  normala la orbita perturbată  $AB$ , iar  $\phi$  — azimutul măsurat în planul acestei orbite.

Se știe că valoarea momentului cinetic corespunzător azimutului  $\varphi$  este o mărime cuantificată, astfel că

$$p_{\varphi} = n_{\varphi} \frac{h}{2\pi}$$

Dacă se introduc notațiile din mecanica cuantică, putem scrie

$$p_l = l \frac{h}{2\pi} \text{ sau } p_l = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi},$$

unde  $l$  este numărul cuantic secundar, iar  $p_l$  este momentul cinetic orbital, datorat mișcării electronului pe orbita eliptică, în jurul nucleului.

Corespunzător celor trei coordonate generalizate, voi exista trei condiții de cuantificare

$$\begin{aligned} \oint p_r dr &= n_r h, \\ \oint p_{\theta} d\theta &= n_{\theta} h, \\ \oint p_{\psi} d\psi &= n_{\psi} h, \end{aligned} \quad (6.14)$$

unde  $p_{\psi}$  este impulsul generalizat, corespunzător azimutului  $\psi$ , măsurat în planul ecuatorial, iar  $p_{\theta}$  este impulsul generalizat corespunzător coordonatei  $\theta$ . Valorile momentelor  $p_r$ ,  $p_{\theta}$  și  $p_{\psi}$  se calculează ca în cazul cuantificării pe o elipsă plană, adică scriind energia cinetică în coordonate sferice, după care se aplică relația

$$p_{\psi} = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\psi}},$$

unde  $\dot{\psi} = \partial q / \partial t$ , așa încît  $q$  putînd reprezenta  $r$ ,  $\theta$  sau  $\psi$ .

Avînd în vedere că  $p_{\psi}$  este proiecția lui  $p_{\varphi}$  pe direcția cîmpului magnetic exterior, rezultă că

$$p_{\psi} = p_{\varphi} \cos \alpha.$$

Întrucît în timpul mișcării,  $p_{\varphi} = \text{const}$ , iar  $\psi$  este o coordonată ciclică, ultima din condițiile de cuantificare (6.14) se scrie

$$p_{\psi} \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi p_{\psi} = n_{\psi} h, \text{ adică } p_{\psi} = n_{\psi} \frac{h}{2\pi}.$$

Așadar, proiecția momentului cinetic orbital pe direcția cîmpului are valori cuantificate, ceea ce înseamnă că orientarea în spațiu a orbitelor electronului nu se face la întîmplare. Într-adevăr, din figura 6.17 rezultă

$$\cos \alpha = \frac{p_{\psi}}{p_{\varphi}} = \frac{n_{\psi} \frac{h}{2\pi}}{n_{\varphi} \frac{h}{2\pi}} = \frac{n_{\psi}}{n_{\varphi}}$$

sau

$$n_{\psi} = n_{\varphi} \cos \alpha.$$

Numărul cuantic  $n_{\psi}$ , care definește mărimea proiecției momentului cinetic pe direcția cîmpului magnetic exterior și poziția suprafeței orbitei staționare în spațiu, se numește număr cuantic magnetic și se notează cu  $m$ . Introducînd numărul cuantic secundar  $l$ , în locul lui  $n_{\varphi}$ , rezultă

$$\cos \alpha = \frac{m}{l},$$

ceea ce arată că sub influența cîmpului magnetic extern sînt permise numai acele orbite care fac un unghi  $\alpha$  cu planul ecuatorial, astfel încît  $\cos \alpha$  este egal cu raportul a două numere întregi.

Deoarece  $|\cos \alpha| \leq 1$ , rezultă că valorile posibile ale lui  $m$  pentru un  $l$  dat, sînt cuprinse în intervalul

$$-l \leq m \leq +l$$

și deci

$$m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm l,$$

adică pentru o valoare dată a lui  $l$ , numărul cuantic magnetic ia  $2l + 1$  valori diferite.

De asemenea, deoarece fiecărei valori a lui  $n$  îi corespunde o orientare a orbitei electronice în spațiu, rezultă că elipsa cu un  $l$  dat va putea avea  $2l + 1$  orientări față de orbita ecuatorială. În același timp, momentul cinetic  $p_{\varphi}$  sau  $p_l$ , fiind perpendicular pe planul orbitei, se dispune și el numai în  $2l + 1$  poziții diferite, față de direcția cîmpului magnetic exterior.

În figura 6.18 sînt arătate orientările posibile ale momentului cinetic orbital în raport cu direcția cîmpului magnetic exterior, pentru  $l = 1; 2; 3$ . Dacă  $l = 1$ ,

$p_l = 1 \frac{h}{2\pi}$ , iar  $m = -1; 0; +1$ , fiind admise trei orientări

posibile pentru  $p_l$ , din care una este pe direcția cîmpului, alta în sens contrar acestuia și a treia face un unghi de  $90^\circ$

cu primele două direcții. Dacă  $l = 2$ ,  $p_l = 2 \frac{h}{2\pi}$  și  $m =$

$= -2; -1; 0; +1; +2$ , deci sînt admise cinci orientări pentru  $p_l$ , dacă  $l = 3$  sînt admise șapte orientări pentru  $p_l$  etc.

De remarcat că  $p_l$  fiind un vector perpendicular pe planul orbitei, rezultă că și  $\vec{l}$ , fiind colinar cu  $\vec{p}_l$  este un vector perpendicular pe planul aceleiași orbite, iar proiecția sa pe direcția cîmpului dă valoarea numărului cuantic magnetic. Datorită mișcării de precesie a orbitei, atît  $\vec{p}_l$ , cît și  $\vec{l}$  vor descrie o mișcare de precesie, o dată cu elipsa, în jurul cîmpului exterior (fig. 6.19). Și, întrucît numărul cuantic magnetic depinde de  $l$ , se notează de obicei cu  $m_l$ .

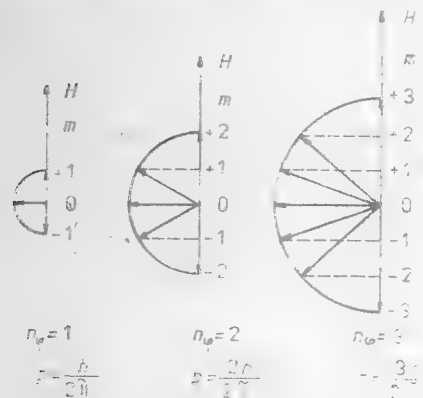


Fig. 6.18.

numit număr cuantic magnetic orbital și este egal cu proiecția lui  $\vec{l}$  pe direcția cîmpului.

Conform teoriei semicuante a lui Bohr, mișcarea electronului pe elipsă este echivalentă cu un curent electric:  $i = e/T = ev$ , unde  $e$  este sarcina, iar  $T$  și  $v$  sînt perioada, respectiv frecvența de rotație a electronului. Existența acestui curent electric determină proprietăți magnetice ale atomului, caracterizate prin momentul magnetic orbital,

$$\mu = i S,$$

adică egal cu produsul dintre intensitatea curentului electric, creat de sarcina  $e$  în mișcare, și aria limitată de circuitul respectiv.

Considerînd, pentru simplitate, că electronul se deplasează pe o orbită circulară (rezultatul fiind același pentru o orbită eliptică), se poate scrie

$$i = e v = \frac{e \omega}{2\pi}, \text{ iar } S = \pi r^2$$

și deci

$$\mu = i S = \frac{e \omega r^2}{2},$$

$v$  fiind viteza unghiulară a electronului. Să transformăm această relație, ținînd seama de condiția cuantică a lui Bohr,

$$p_\phi = m_0 v r = n_\phi \frac{h}{2\pi}.$$

Înlocuind  $v = \omega r$ , se obține  $m_0 v r = m_0 \omega r^2$  și deci

$$m_0 \omega r^2 = l \frac{h}{2\pi},$$

unde am înlocuit pe  $n_\phi$  cu numărul cuantic secundar  $l$ .

Se obține pentru  $\mu$  expresia

$$\mu = \mu_0 \frac{e h}{4 \pi m_0},$$

care arată că momentul magnetic al atomului este un multiplu întreg al mărimii

$$\mu_0 = \frac{e h}{4 \pi m_0}.$$

Mărimea  $\mu_0$  se numește moment magnetic elementar sau magnetonul Procopiu-Bohr, a cărui valoare este

$$\mu_0 = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Joule} \cdot \text{m}^2/\text{Web}.$$

Momentul magnetic

$$\mu = m \mu_0; \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \pm l,$$

datorat mișcării electronului pe orbită, poartă numele de moment magnetic orbital.

Prezența cîmpului magnetic are o deosebită influență asupra spectrului. Perturbînd orbitele eliptice din atom,



fiecare stare ce avea energia  $W$ , în prezența câmpului are energia  $W + \Delta W$ , energia suplimentară  $\Delta W$  ducând la desfacerea liniilor spectrale în mai multe componente. Într-adevăr, fenomenul a fost observat în câmp magnetic în 1896 de către Zeeman, iar în câmp electric în 1913 de către Stark.

Deși teoria orbitelor eliptice a lui Sommerfeld a prezis aceleași serii spectrale ca și teoria lui Bohr, explicând într-un anumit fel complexitatea liniilor spectrale, această explicație nu este satisfăcătoare și nu concordă cu experiența, atunci când spectrele erau obținute cu aparate spectrale de foarte bună rezoluție.

Rezolvarea problemei a fost dată tot de către Sommerfeld, grație mecanicii relativiste, ținând seama că în mișcarea sa, în câmpul coulombian al nucleului, viteza electronului variază substanțial în diferitele puncte ale elipsei.

Într-adevăr, în mișcarea pe elipsă, electronul se apropie sau se depărtează de nucleu, viteza sa variind în mod constant: este maximă la periheliu și minimă la afeliu. Având în vedere că teoria relativității restrinse consideră că masa corpului nu este o mărime absolută, ci variază cu viteza, conform relației

$$m = m_0 \left/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right.,$$

unde  $m_0$  este masa de repaus a corpului, iar  $c$  — viteza luminii în vid, rezultă că și masa electronului va varia o dată cu viteza.

În această situație, Sommerfeld a arătat că are loc o deplasare continuă a periheliului, ceea ce corespunde unei rotații continue a orbitei eliptice. Aceasta înseamnă că în atomul lui Sommerfeld, electronul nu parcurge doar o simplă elipsă, ci o orbită infinit mai complicată, de forma unei rozete, obținută în urma mișcării de precesie a elipsei în jurul focarului, cu o viteză unghiulară constantă (fig. 6.20).

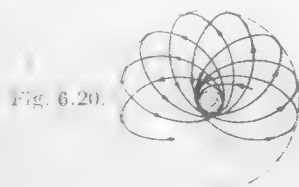


Fig. 6.20.

Calculând energia stării staționare, corespunzătoare unei pături de electroni, Sommerfeld găsește o relație de forma

$$W = - \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 h^2} + \mathcal{E}(n, l)$$

unde  $\mathcal{E}(n, l)$  este un termen de corecție, rezultat ca urmare a variației masei electronului în mișcarea pe elipsă. Se observă că energia  $W$  a stării staționare depinde atât de numărul cuantic principal  $n$ , cât și de numărul cuantic secundar  $l$ , ceea ce înseamnă că pentru o valoare a lui  $n$ , corespund mai multe valori distincte ale lui  $W$ , corespunzătoare diferitelor valori pe care le poate lua  $l$ .

În acest fel, influența termenului  $\mathcal{E}(n, l)$  constă în despicarea fiecărui nivel energetic din teoria lui Bohr, în câteva nivele, apropiate între ele, numărul lor fiind egal cu cel al valorilor pe care le poate lua numărul cuantic secundar  $l$ .

Mai exact, conform modelului relativist de atom al lui Sommerfeld rezultă că fiecare linie spectrală din teoria lui Bohr reprezintă de fapt un sistem de linii fine care corespund trecerilor de pe nivelele stărilor superioare, caracterizate prin  $n = n_2$  și  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n_2 - 1$ , pe nivelele inferioare, caracterizate prin  $n = n_1$  și  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n_1 - 1$ , unde  $n_2 > n_1$ .

În figura 6.21 se face o comparație a modului de emisie al liniilor spectrale în teoria lui Bohr (a) și teoria lui Sommerfeld (b). Se observă că liniei roșii  $H_\alpha$  din teoria lui Bohr îi corespund 6 linii în teoria lui Sommerfeld și aceasta, întrucât nivelul  $n = 3$  cuprinde subnivelele  $3s$ ,  $3p$  și  $3d$ , iar nivelul  $n = 2$  cuprinde subnivelele  $2s$  și  $2p$ .



Fig. 6.21.

Trebuie să remarcăm că folosirea unor spectrografe cu mare putere de rezoluție pentru studierea spectrelor de emisie, deși a arătat că structura fină este un fapt real, numărul liniilor observate experimental este mai mic decât cel dat de teoria lui Sommerfeld. De exemplu, pentru

linia  $H_\alpha$  teoria arată că ea ar trebui să aibă șase componente, în timp ce experiența nu verifică acest rezultat, ceea ce înseamnă că nu toate tranzițiile electronice sînt posibile în practică.

Pentru a apropia rezultatele teoretice de cele experimentale, Rubinovici introduce regula de selecție, conform căreia sînt posibile numai acele tranziții pentru care  $\Delta l = \pm 1$ . În acest fel, fiecare linie din seria Balmer este formată din trei componente, în timp ce liniile seriei Lyman sînt linii unice.

Deși mai generală decît teoria lui Bohr, teoria lui Sommerfeld are și ea o serie de limite. Așa, de exemplu, teoria lui Sommerfeld combinată cu regula de selecție a lui Rubinovici prezice trei componente pentru linia  $H_\alpha$  a hidrogenului, în timp ce în practică se observă patru componente. Apoi, teoria nu poate explica spectrele atomilor metalelor alcaline și comportarea atomului în cîmp magnetic, precum și variația intensității liniilor spectrale în spectrele de emisie. Teoria nu a putut da o explicație completă nici măcar pentru cel mai simplu atom după hidrogen — atomul de heliu, care are doi electroni în învelișul electronic.

Pentru rezolvarea cel puțin parțială a acestor probleme a fost necesară introducerea altor numere cuantice, care să reflecte proprietățile atomului și a componentelor sale.

### 6.1.5. Modelul vectorial al atomului

Studiul structurii fine a liniilor spectrale în câteva cazuri a arătat că ipoteza orbitelor eliptice a lui Sommerfeld nu furnizează o explicație adecvată. În particular, liniile de dubleți din spectrele metalelor alcaline (de exemplu, binecunoscutele linii  $D$  ale sodiului cu lungimile de undă de 5890 Å și 5896 Å), liniile de tripleți din spectrele metalelor alcalino-pămîntoase și liniile de multipleți ale spectrelor atomilor cu mai mulți electroni pe ultima pătură nu au putut fi explicate cu vechile teorii. De asemenea, experiența arată că momentele magnetice ale unor atomi nu sînt multipli întregi ai magnetonului Procopiu-Bohr.

În 1925, Goudsmit și Uhlenbeck, folosind o sugestie a lui Pauli, au postulat că electronul, în afară de mișcarea orbitală pe elipsă, în jurul nucleului, prezintă și o mișcare în jurul axei proprii. Situația este analogă cu a Pămîntului sau a altor planete care se rotesc atît în jurul Soa-

relui (mișcarea anuală), cît și în jurul propriilor axe (mișcare diurnă). Noua mișcare de rotație a fost denumită spin, care în limba engleză înseamnă rotire și ea s-a dovedit răspunzătoare pentru dublarea nivelelor energetice.

La fel ca și mișcarea orbitală a electronului, care a introdus un moment cinetic orbital,

$$p_l = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi},$$

și un moment magnetic orbital

$$\mu_l = l\mu_0,$$

mișcarea de spin introduce și ea un moment cinetic propriu, numit spin, care în concepția mecanicii ondulatorii este (v. 6.1.6)

$$p_s = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi}$$

și un moment magnetic propriu,

$$\mu_s = \pm \mu_0,$$

unde  $s$  reprezintă numărul cuantic de spin<sup>1</sup>.

Comparînd raporturile pentru cele două mișcări ale electronului, rezultă

$$\left(\frac{\mu}{p}\right)_s = 2 \left(\frac{\mu}{p}\right)_l,$$

adică raportul  $\mu/p$  pentru mișcarea de spin este dublu față de același raport ce corespunde mișcării orbitale.

Ca și momentul cinetic orbital, care față de o direcție privilegiată, de exemplu, un cîmp magnetic extern, ia  $2l+1$  orientări, și momentul cinetic propriu va lua  $2s+1$

<sup>1</sup> Este momentul să arătăm că după postularea celor patru numere cuantice ( $n, l, m, s$ ) au fost făcute încercări de a explica științific periodicitatea proprietăților elementelor în sistemul periodic. Bohr enunță primul ideea, în 1921, că periodicitatea proprietăților elementelor se datorează aranjării electronilor într-un anumit fel în straturi, în jurul nucleului.

Un pas important în explicarea modului de aranjare a electronilor în pături este făcut de Pauli, care enunță următorul principiu, numit principiu de excluziune a lui Pauli: într-un atom nu pot exista doi electroni care să aibă aceleași numere cuantice. Deci, după acest principiu, fiecare din electronii unui atom se vor deosebi prin cel puțin unul dintre cele patru numere cuantice.

orientări. Întrucît toți termenii spectrali ai sodiului, cu excepția termenilor  $s(l=0)$ , sînt dubli, înseamnă că momentul cinetic propriu are de fapt numai două orientări și deci  $2s + 1 = 2$ , adică  $s = 1/2$  (în unități  $h/2\pi$ ).

Așa cum momentul cinetic orbital poate fi caracterizat prin vectorul  $\vec{l}$ , tot astfel, momentul cinetic propriu (de spin) poate fi caracterizat prin vectorul  $\vec{s}$ . Proiectînd momentul cinetic propriu după o direcție privilegiată, de exemplu, cîmpul magnetic creat de deplasarea electronilor pe orbitele din jurul nucleului, vectorul  $\vec{s}$  poate avea două orientări: una paralelă și alta antiparalelă cu direcția dată. Aceste două proiecții, cuantificate și ele, sînt caracterizate de numărul cuantic magnetic de spin  $m_s$ , care poate lua valorile  $\pm 1/2$ .

Așadar, cele două proiecții ale momentului cinetic propriu pe direcția privilegiată, au valorile

$$+ \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \quad \text{și} \quad - \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}.$$

Faptul că există un moment cinetic orbital și un moment cinetic propriu, cărorale corespund numerele cuantice  $l$  și  $s$ , precum și vectorii  $\vec{l}$  și  $\vec{s}$ , se pune problema compunerii celor două mișcări: orbitală și de spin.

Presupunem, mai întii, cazul relativ simplu, al atomului cu un singur electron. Întrucît trebuie să compunem doi vectori, rezultatul va fi tot un vector,

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s},$$

unde  $\vec{j}$  este vectorul momentului cinetic orbital,

$$p_j = \sqrt{j(j+1)} \cdot \frac{h}{2\pi},$$

$j$  fiind numărul cuantic intern.

Deoarece  $\vec{s}$  poate avea două orientări față de  $\vec{l}$ , una paralelă și alta antiparalelă, rezultă că pentru un  $l$  dat,  $j$  poate avea valorile

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad j = l - \frac{1}{2},$$

decî, pentru fiecare valoare a lui  $l$ , corespund două valori pentru  $j$ .

În cazul atomului cu doi sau mai mulți electroni, problema obținerii momentului cinetic total este ceva mai

complicată și se face folosind așa-numitul model vectorial al atomului, ale cărui elemente sînt cunoscute sub formă de vectori. Pentru simplitate, vom considera cazul elementelor care au în subpătura exterioară doi electroni, cum sînt de exemplu, He I, Li, Be III care au numai doi electroni în afara nucleului, precum și elementele alcalino-pămîntoase și Zn, Cd, Hg etc. Starea atomilor acestor elemente este determinată numai de cei doi electroni periferici, numiți și electroni de valență. Electronii de valență au un rol activ în producerea spectrelor de emisie ale atomilor excitați. Ceilalți electroni ai atomului cu doi electroni de valență formează pături închise, pentru care momentele rezultante sînt nule.

Fie unul dintre cei doi electroni aflați pe o orbită pentru care numărul cuantic intern este  $l_1$ , iar numărul cuantic de spin  $s_1$ . Celălalt electron are, în mod corespunzător, numerele cuantice  $l_2$  și  $s_2$ .

Pentru aflarea momentului cinetic total, se poate proceda în două moduri. Dacă interacțiunea dintre „spin” și „orbită” nu este atît de puternică, se însumează separat momentele cinetice orbitale, separat momentele cinetice de spin ale fiecărui electron, iar momentul cinetic total se obține prin însumarea celor două momente cinetice, orbital și de spin. Acest mod de compunere se aplică atomilor nu prea grei și se numește cuplaj normal, cuplaj  $LS$  sau cuplaj Russell-Saunders.

Dacă  $\vec{l}_1$  și  $\vec{l}_2$  sînt vectorii momentelor orbitale, corespunzător celor doi electroni, atunci vectorul momentului cinetic orbital al sistemului, va fi

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2,$$

iar momentul cinetic orbital rezultat,

$$p_L = \sqrt{L(L+1)} \cdot \frac{h}{2\pi}.$$

În același timp, dacă  $\vec{s}_1$  și  $\vec{s}_2$  sînt vectorii momentelor cinetice de spin ai celor doi electroni, vectorul momentului cinetic de spin total va fi

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2,$$

iar momentul cinetic de spin rezultat,

$$p_s = \sqrt{S(S+1)} \cdot \frac{h}{2\pi}.$$

Momentul cinetic total al sistemului este dat de suma geometrică a rezultantei momentului orbital  $\vec{p}_L$  și a rezultantei momentului propriu  $\vec{p}_S$  al sistemului,

$$\vec{p}_J = \vec{p}_L + \vec{p}_S.$$

Momentele rezultante  $\vec{p}_L$  și  $\vec{p}_S$  formează între ele unghiuri pentru care momentul cinetic total ia valorile

$$p_J = \sqrt{J(J+1)} \frac{h}{2\pi}.$$

Vectorul corespunzător acestui moment fiind

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},$$

să vedem care sînt valorile pe care le poate lua  $\vec{J}$ . Pentru aceasta, să observăm că dacă atomul este neexcitat, cei doi electroni optici se află în starea  $s$ , pentru care  $l = 0$ . Dacă atomul este excitat, cei doi electroni se pot afla în starea  $p$  sau într-o stare superioară, pentru care  $l$  are o valoare finită.

De asemenea, să observăm că vectorii  $\vec{l}_1$  și  $\vec{l}_2$  nu pot avea orice fel de orientări între ei. Ei trebuie să fie orientați astfel încît vectorul  $\vec{L}$  să aibă modulul egal cu un număr întreg. În același timp, deoarece  $\vec{s}_1$  și  $\vec{s}_2$  neputînd fi decît paraleli sau antiparaleli între ei, rezultă că  $\vec{S} = 0$  cînd spinii celor doi electroni sînt antiparaleli și  $\vec{S} = 1$ , cînd spinii sînt paraleli. Deci, valoarea lui  $\vec{S}$  poate fi zero sau unu.

Ca prim exemplu, să considerăm  $l_1 = 1$  și  $l_2 = 0$ , deci  $\vec{L} = 1$ . Prin urmare, prin adunare vectorială, deoarece  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , cînd  $\vec{L} = 1$  și  $\vec{S} = 0$ , se obține  $\vec{J} = 1$ , ceea ce corespunde unui nivel de singlet pentru atomul respectiv, fapt notat cu  $1P_1$ .

În cazul în care  $\vec{L} = 1$  și  $\vec{S} = 1$  pot exista trei situații diferite care dau pentru  $\vec{J}$  valorile 2, 1 sau 0 (fig. 6.22)

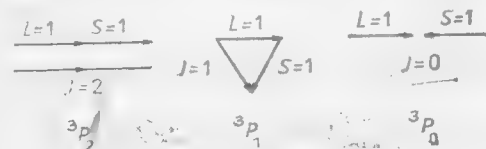


Fig. 6.22.

existînd trei nivele energetice diferite, deci un triplet pe care îl vom nota astfel:  $^3P_2$ ,  $^3P_1$ ,  $^3P_0$ , indicele din stînga sus arătînd multiplicitatea termenului (singlet, triplet), iar indicele din dreapta jos arată valoarea numărului cuantic  $J$ .

Să considerăm acum, ca al treilea exemplu, situația cînd  $l_1 = l_2 = 1$ . Vectorul momentului cinetic orbital fiind  $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ , poate lua valorile 0, 1 sau 2 (fig. 6.23, a), iar stările corespunzătoare sînt  $S$ ,  $P$  sau  $D$ . Fie mai întîi  $\vec{S} = 0$ . Rezultă pentru  $\vec{L} = 2$  și  $\vec{S} = 0$ ,

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = 2,$$

adică se obține singletul  $^1D_2$ . Pentru  $\vec{L} = 2$  și  $\vec{S} = 1$ , valoarea lui  $\vec{J}$  se obține din suma vectorială  $\vec{L} + \vec{S}$ .

Din figura 6.23, b se observă că  $\vec{J}$  poate lua valorile 1, 2 sau 3, existînd deci tripleții:  $^3D_1$ ,  $^3D_2$ ,  $^3D_3$ . Tranzițiile dintre nivele au loc astfel încît sînt respectate regulile de selecție  $\Delta J = 0, \pm 1$ .

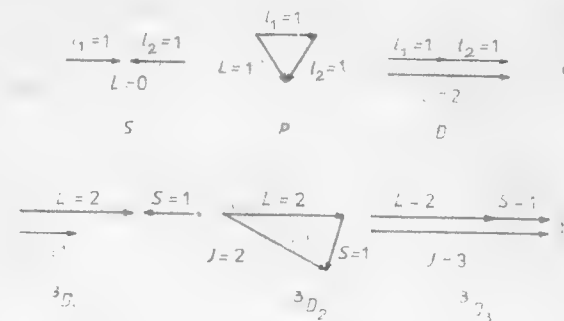


Fig. 6.23.

Atomilor cu un număr de electroni de valență mai mare, deci atomi mai grei, pentru care interacțiunea „spin” — „orbită” este foarte puternică, li se aplică cuplajul  $JJ$ . În cazul acestui tip de cuplaj, se însumează mai întîi, separat, momentul orbital cu cel de spin pentru fiecare electron și apoi se însumează rezultatele, obținîndu-se momentul cinetic total. Toate aceste rezultate au o importanță deosebită în spectroscopie, la interpretarea nivelelor energetice posibile ale atomilor, la sistematizarea unor elemente și combinații ale acestora etc.

### 6.1.6. Modelul ondulatoriu al atomului

Așa cum s-a arătat mai înainte, atât teoria lui Bohr cât și completările aduse ulterior de Sommerfeld, au o serie de imperfecțiuni, neputând explica toate faptele experimentale, observate la nivelul atomului, ceea ce au determinat noi încercări de a pune de acord teoria cu experiența.

Însuși Bohr considera că teoria sa cuantică nu trebuie considerată ca o teorie definitivă. Realitatea era că multe fapte experimentale acumulate nu găseau un fundament științific în vechile teorii. Acest lucru a necesitat revizuirea critică a bazelor teoriei cuantice vechi și în general, a concepțiilor despre natura particulelor elementare.

Bazele noii teorii au fost formulate aproape în același timp, între anii 1923 — 1927, de către de Broglie și Schrödinger (mecanica cuantică ondulatorie) și Heisenberg (mecanica cuantică matriceală). Deși punctele de plecare ale celor două teorii sînt diferite, rezultatele la care ajung sînt aceleași.

În cele ce urmează, vom trata pe scurt principiile mecanicii ondulatorii precum și noul model de atom construit pe baza acestei teorii.

În teoria corpusculară a luminii, fundamentată științific de Einstein, se considera că fiecare foton are energia  $W = mc^2$  și impulsul  $p = mc$ , unde  $c$  este viteza luminii în vid, iar  $m$  este masa de mișcare a fotonului. De asemenea, fiecărui foton îi este atașată o undă avînd lungimea de undă  $\lambda = c/\nu$ . Cunoșcînd din teoria cuantelor că energia fotonului se mai poate scrie,  $W = h\nu$ , rezultă că

$$p = mc = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c},$$

unde  $h$  este constanta lui Planck.

Se constată că unda luminoasă are lungimea de undă

$$\lambda = \frac{h}{mc},$$

relație care rezolvă complet contradicția dintre teoria corpusculară și teoria ondulatorie a luminii, scoțînd în evidență dublul caracter, de corpusecul și de undă a luminii.

Cunoșcînd că lumina, care este o undă electromagnetică, are și o natură corpusculară, în 1924 Louis de Broglie, își pune problema dacă nu este posibil ca și substanța,

pe lingă natura corpusculară, să posede și proprietăți ondulatorii.

Admițînd ipoteza că substanța are un caracter dual, de corpusecul și de undă, de Broglie generalizează relațiile de mai sus și găsește că unda asociată unei particule de substanță, are lungimea de undă

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}, \quad (6.15)$$

unde  $m$  este masa, iar  $v$  — viteza particulei. De observat că unda asociată particulelor de substanță, numită și undă de Broglie, nu este de natură electromagnetică și deci nu trebuie confundată cu aceasta.

În concepția lui de Broglie, oricărui corp de masă  $m$  care se mișcă cu viteza  $v$ , i se poate asocia o undă de Broglie, a cărei lungime de undă depinde de masa corpului respectiv.

Ipoteza undei asociate de Broglie a fost strălucit verificată de către Davisson și Germer, în 1927, prin lucrările lor de difracție a electronilor. Schema aparatului experimental folosit de ei este arătată în figura 6.24. Electronii emiși de filamentul  $F$  sînt accelerați de diferența de potențial  $U$  variabilă și trimiși spre una dintre fețele unui monocristal de nichel. Intensitatea electronilor difracți într-o direcție oarecare este măsurată cu ajutorul unui cilindru Faraday legat la un galvanometru. Cilindrul Faraday se poate roti cu un unghi cuprins între  $0^\circ$  și  $90^\circ$ , în jurul unei axe conținută în planul feței cristalului și care trece prin punctul de coincidență.

Experiențele au arătat că pentru fiecare tensiune de accelerare  $U$ , maximul intensității electronilor difuzați, se obține pentru un anumit unghi. Cel mai intens maxim se obține pentru  $U = 54$  volți și un unghi de  $50^\circ$  față de direcția fascicului incident.

Avînd în vedere că energia cinetică a electronilor este

$$\frac{1}{2} m v^2 = eU$$

și că lungimea undei asociate este  $\lambda = h/mv$ , se obține

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}.$$

Înlocuind în această relație constantele cunoscute, se găsește că

$$\lambda = 6,6 \cdot 10^{-34} / \sqrt{2 \times 54 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 9,1 \times 10^{-31}} = \\ = 1,67 \times 10^{-10} \text{ m} = 1,67 \text{ \AA}, \text{ adică de același ordin de mărime cu lungimea de undă a radiației X moi.}$$

Prin înlocuirea fascicului de electroni cu un fascicul de radiații X moi, s-a constatat că unghiul de difuzie era aproape egal cu cel constatat în cazul folosirii electronilor.

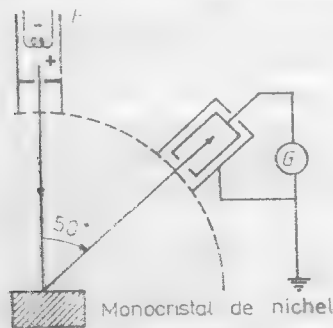


Fig. 6.24.

Fenomenul reprezintă o reflexie selectivă a electronilor și poate fi explicat, dacă se admite că unda asociată atomului suferă reflexii atât pe fața superioară a cristalului, adică pe primul plan reticular, cât și pe planele aflate în interiorul cristalului. Apariția maximelor și mininelor intensității fascicului de electroni, la reflexia lor pe diferite plane reticulare, poate fi înțeleasă admitând că electronii suferă un proces de reflexie prin interferență, adică se comportă ca niște unde.

Ipoteza undei asociate a lui de Broglie permite găsirea condiției de cuantificare a lui Bohr, fără introducerea postulatelor sale. Și anume, înlocuind electronul, în mișcarea pe orbită, cu unda sa asociată, pentru ca această undă să nu se anuleze prin interferență, adică electronul să parcurgă o orbită stabilă, este necesar ca unda respectivă să fie o undă staționară. Conform teoriei ondulatorii, sînt stabile sau permise numai acele orbite, care conțin un număr întreg de lungimi de undă, în caz contrar, orbitele sînt nestabile (fig. 6.25).

Notînd cu  $n$  numărul de lungimi de undă  $\lambda$ , orbita stabilă are lungimea  $2\pi r = n\lambda$ ,  $r$  fiind raza orbitei. Înlo-

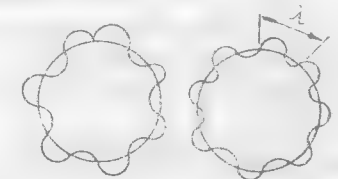


Fig. 6.25.

cui nd în această expresie pe  $\lambda$  din (6.15), se obține  $2\pi r = nh/mv$  și deci

$$mvr = n \frac{h}{2\pi},$$

adică am obținut condiția cuantică a lui Bohr (6.8), pe o cale mult mai logică.

Faptul că microparticulele prezintă și proprietăți ondulatorii, pentru caracterizarea lor trebuie folosite atât mărimi ce definesc un corpuscul (masa, impulsul), cât și mărimi ondulatorii (lungimea de undă, frecvența).

În același timp, contradicțiile dintre proprietățile corpusculare și cele ondulatorii ale microparticulelor se exclud reciproc. Justețea acestei afirmații rezultă din compararea fenomenelor ce au loc la trecerea dintr-un mediu în altul, pentru lumină și separat pentru electroni. Ajungînd la suprafața de separație dintre două medii optice diferite, o parte din lumină, considerată ca o undă, se reflectă, iar alta se refractă. Dacă se face aceeași experiență cu fascicule de electroni, fiecare dintre electroni neputînd fi divizat, pentru a-și păstra integritatea, un electron va suferi fie fenomenul de reflexie, fie fenomenul de refracție.

În experiențele de interferență a luminii monocromatice, energia luminoasă primită într-un punct este proporțională cu pătratul amplitudinii cîmpului electric al undei luminoase. Din punct de vedere corpuscular, se poate spune că aceeași energie este proporțională cu numărul de fotoni ce ajung în punctul respectiv, ceea ce înseamnă că în locurile luminoase ale franjei de interferență vor ajunge mai mulți fotoni decît în locurile întunecate. Mai mult, acest rezultat arată că probabilitatea ca un foton să lovească placa fotografică în locul unei franje luminoase este mai mare decît în locul franjei întunecate.

O descriere asemănătoare poate fi aplicată și pentru cazul difracției electronilor pe rețeaua cristalină. Probabilitatea ca un electron să lovească un punct dat de pe placa fotografică este proporțională cu pătratul amplitudinii undei de Broglie, asociată electronului. Folosind această idee, starea unei microparticule sau sistem de microparticule poate fi descrisă cu ajutorul funcției complexe, numită funcția de undă  $\psi$ , al cărei modul este egal cu



amplitudinea  $\Psi$  a undei de Broglie, asociată microparticulei.

Max Born interpretează funcția de undă, postulind că pătratul amplitudinii undei într-un punct este proporțional cu probabilitatea pentru ca electronul să se afle într-un element de volum  $dV$ , la momentul considerat. Reciproc, probabilitatea ca electronul să se afle la un moment dat în elementul de volum  $dV$  din jurul unui anumit punct din spațiu este

$$dP = |\Psi|^2 dV,$$

unde  $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ , este pătratul modulului amplitudinii complexe a funcției de undă, egal cu produsul dintre  $\Psi$  și mărimea imaginar conjugată  $\Psi^*$ . Mărimea

$$\frac{dP}{dV} = |\Psi|^2$$

este densitatea de probabilitate.

Legat de interpretarea dată de Born, în cazul reflexiei și refracției, există o anumită probabilitate pentru ca un electron dintr-un fascicul să sufere fie fenomenul de reflexie, fie fenomenul de refracție.

Faptul că pătratul modulului amplitudinii funcției de undă este proporțional cu variația probabilității de localizare a microparticulei conduce la o deosebire netă în ceea ce privește noțiunea de orbită, din mecanica cuantică veche a lui Bohr și cea din mecanica cuantică ondulatorie. În sensul teoriei lui Bohr, orbita reprezintă o linie bine determinată, în timp ce în mecanica cuantică ondulatorie, noțiunea de orbită este înlocuită cu aceea de nor electronic, unde densitatea de probabilitate de localizare a electronului este maximă. În conformitate cu această reprezentare, a fost propus un nou model al atomului modelul ondulatoriu, care concepe că atomul este format dintr-un nucleu cu sarcină pozitivă, în jurul căruia se găsește un nor electronic, format din electroni ce gravitează în jurul nucleului.

Deși de Broglie a emis primul ideea undei asociate microparticulei în mișcare, el nu a reușit să construiască un formalism matematic, care să conțină ecuația de mișcare a undei, așa cum este ecuația lui Newton pentru macroparticule. În 1926, Schrödinger formulează primul

o ecuație diferențială pentru unda asociată microparticulei, ținând seama de dublul ei caracter: de undă și de corpusul.

În acest scop, să considerăm, pentru simplitate, o undă plană care se propagă de-a lungul axei  $x$  cu viteza de fază  $u$ . Notăm cu  $\phi$  deplasarea (perturbația) față de poziția de echilibru la momentul  $t$ . Ecuația diferențială care descrie această mișcare ondulatorie este

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (6.16)$$

Soluția acestei ecuații este de forma unei simple funcții armonice de timp,

$$\psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \cos \frac{2\pi}{T} t$$

sau

$$\psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \exp[-i\omega t], \quad (6.17)$$

unde  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  fiind frecvența, iar  $\Psi$  este amplitudinea mișcării ondulatorii.

Diferențiind soluția (6.17) de două ori, în raport cu timpul, se obține

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi \exp[-i\omega t] = -\omega^2 \psi,$$

astfel încât ecuația (6.16) devine

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2 \psi}{u^2} = -\frac{4\pi^2 \nu^2 \psi}{u^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \psi, \quad (6.18)$$

deoarece  $u = \nu\lambda$ . Folosind expresia pentru  $\lambda$  din formula lui de Broglie  $\lambda = h/mv$ , unde  $m$  este masa microparticulei, iar  $v$  este viteza sa de mișcare de-a lungul axei  $x$  (vitezele  $v$  și  $u$  nu sînt identice), ecuația (6.18) devine

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\left(\frac{mv}{h}\right)^2 \psi, \quad (6.19)$$

unde  $h = h/2\pi$ .

Dacă avem în vedere că fiecare microparticulă ce posedă energia totală

$$W = \frac{1}{2} mv^2 + W_p,$$

unde  $\frac{1}{2}mv^2$  și  $W_p$  sînt energia cinetică, respectiv energia potențială, se obține

$$mv = \sqrt{2(W - W_p)m}$$

și deci ecuația (6.19) se scrie

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2(W - W_p)}{\hbar^2} \psi$$

sau

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - W_p) \psi = 0. \quad (6.20)$$

Ținînd seama că  $\psi = \Psi \exp[-i\omega t]$ , după împărțirea prin  $\exp[-i\omega t]$ , ecuația (6.20) devine

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - W_p) \Psi = 0, \quad (6.21)$$

care reprezintă ecuația de undă a lui Schrödinger unidimensională și independentă de timp.

Dacă se are în vedere faptul că o undă se propagă în toate direcțiile, ultima ecuație extinsă pentru spațiul tridimensional se scrie astfel

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - W_p) \Psi = 0$$

sau

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (W - W_p) \Psi = 0, \quad (6.22)$$

unde

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

este operatorul diferențial în coordonate carteziene (laplacean), aplicat funcției  $\Psi$ .

Trebuie să menționăm că cele de mai sus nu constituie o deducere a ecuației lui Schrödinger. De fapt, s-au făcut câteva presupuneri, adoptîndu-se un anumit formalism, care reprezintă o generalizare a ceea ce se întîmplă în cazul mișcării unei particule libere, descrisă de unda de Broglie. Toate acestea au permis „inducerea” și deci postularea acestei ecuații. Valabilitatea acestei ecuații

rezultă din concordanța consecințelor sale cu datele experimentale.

Un succes deosebit al ecuației lui Schrödinger a constat în faptul că ea a putut fi aplicată atât atomului de hidrogen cît și atomilor mai grei, care au mai mulți electroni, de exemplu, atomii hidrogenoizi. În continuare, vom arăta modul cum se aplică această ecuație pentru un atom hidrogenoid și care sînt avantajele aplicării noii teorii cuantice, față de vechea teorie, a lui Bohr.

Desigur că datorită simetriei sferice a interacțiunii dintre nucleu și electron, în locul coordonatelor carteziene este mai comod să se lucreze cu coordonatele sferice  $r, \theta$  și  $\varphi$ , avînd nucleul în punctul de origine. Expresia operatorului diferențial în sistemul de coordonate sferice, aplicat funcției  $\Psi$ , are forma

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}.$$

Pentru studiul mișcării în cîmp central, de exemplu, mișcarea electronului în cîmpul nucleului, în ecuația (6.22) se înlocuiește  $\nabla^2 \Psi$  prin expresia acestuia în coordonate sferice și energia potențială  $W_p$  prin expresia acesteia în respectivul cîmp central. Se caută apoi acele soluții ale ecuației astfel obținute, care îndeplinesc condițiile standard, adică de continuitate, mărginire, univocitate și ortonormare. În general, în mișcarea în cîmp central neexistînd suprafețe de discontinuitate, condițiile cele mai importante sînt cele de mărginire și univocitate pentru variabilele unghiulare și ortonormarea. Aceste condiții înlocuiesc ca efect postulatul lui Bohr cu privire la stările staționare.

Considerăm că, la un moment dat, electronul avînd sarcina  $(-e)$  se află la distanța  $r$  față de nucleul de sarcină  $(+Ze)$ . Energia potențială a electronului în cîmpul nucleului, presupus cu masă infinită, este

$$W_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Folosind aceste elemente, ecuația lui Schrödinger (6.22) devine

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( W + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi = 0. \quad (6.23)$$

Soluțiile acestei ecuații cer ca funcția de stare  $\Psi$  să fie finită în tot spațiul, să fie funcție continuă de coordonatele  $(r, \theta, \varphi)$  și să admită derivate continue de ordinul întâi. Aceste cerințe înlocuiesc, ca efect, postulatul lui Bohr cu privire la stările staționare.

Soluția completă a ecuației (6.23) este complicată. Este însă suficient să arătăm aici că ea poate fi separată convenabil în alte trei ecuații, dacă se ia  $\Psi$  sub forma

$$\Psi = F_1(r) F_2(\theta) F_3(\varphi).$$

Se obține

$$\frac{d^2 F_1(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF_1(r)}{dr} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( W + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) F_1(r) = 0, \quad (6.24)$$

unde  $F_1(r)$  este funcție numai de  $r$ .

$$\frac{d^2 F_2(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dF_2(\theta)}{d\theta} + l(l+1)F_2(\theta) - \frac{m_l^2 F_2(\theta)}{\sin^2 \theta} = 0, \quad (6.25)$$

unde  $F_2(\theta)$  este funcție numai de  $\theta$ , iar  $m_l$  și  $l$  sînt constante, și

$$\frac{d^2 F_3(\varphi)}{d\varphi^2} + m_l^2 F_3(\varphi) = 0, \quad (6.26)$$

unde  $F_3(\varphi)$  este funcție numai de  $\varphi$ .

Condițiile standard, pe care trebuie să le îndeplinească, conduc la cerințele ca  $l$  să aibă valori întregi nenegative, adică  $0; 1; 2; \dots$ , iar  $m_l$  să ia valorile  $0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm l$ .

Soluția ecuației (6.24) funcție de  $r$  permite găsirea valorilor energiei pentru stările staționare ale atomului de hidrogen, obținându-se aceeași expresie ca și aceea dată de teoria lui Bohr.

Studiind soluția ecuației (6.25) se poate arăta că  $\sqrt{l(l+1)}$  este mărimea numărului cuantic orbital  $l$ , introdus în teoria orbitelor eliptice, și că  $m_l$  este mărimea numărului cuantic magnetic  $m_l$ , toate introduse mai întâi în teoria lui Sommerfeld. Mecanica cuantică cere ca mărimile corespunzătoare vectorilor  $\vec{l}$  și  $\vec{s}$  să nu fie  $l$  și  $s^2$ , ci  $\sqrt{l(l+1)}$  și  $\sqrt{s(s+1)}$ . De asemenea, avînd în vedere posibilitatea compunerii vectoriale a vectorilor  $\vec{l}$  și  $\vec{s}$  pentru a obține vectorul  $\vec{j}$ , corespunzător numărului cuantic intern, rezultă că

$$\sqrt{j(j+1)} = \sqrt{l(l+1)} + \sqrt{s(s+1)}.$$

Credem că este instructiv să considerăm o situație mai simplificată pentru atomul de hidrogen și anume situația cînd  $\Psi$  variază numai cu raza vectorială  $r$ . Din cele trei ecuații separate, singura care este necesară este ecuația (6.24) și care poate fi scrisă astfel:

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( W + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi = 0. \quad (6.27)$$

Cea mai simplă soluție a acestei ecuații este de forma

$$\Psi = \exp(-ra),$$

unde  $a$  este o constantă, soluția satisfăcînd astfel ecuația (6.27), încît  $\Psi$  tinde la zero pentru distanțe  $r$  mari ale electronului față de nucleu. Substituind această soluție în (6.27) și împărțind prin  $\exp(-ra)$ , se obține

$$a^2 - \frac{2a}{r} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( W + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = 0.$$

<sup>2</sup> De remarcat că teoria ondulatorie a atomului nu postulează numărul cuantic de spin și nici vreun punct de vedere relativist. Bazele teoriei mișcării relativiste ale electronului au fost puse de Dirac, în ale cărei ecuații există o serie de termeni ce includ spinul electronului.

Pentru ca această ecuație să fie adevărată pentru orice valori ale lui  $r$ , este necesar ca suma termenilor independenți de  $r$  să fie nulă, adică

$$a^2 - \frac{2m_e W}{\hbar^2} = 0. \quad (6.28)$$

Coefficientul lui  $1/r$  poate fi, de asemenea, egal cu zero. Rezultă

$$-2a + \frac{2m_e}{\hbar^2} \cdot \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} = 0,$$

de unde

$$a = \frac{m_e Ze^2}{4\pi\hbar^2\epsilon_0}. \quad (6.29)$$

Înlocuind expresia lui  $a$  în (6.28), se obține

$$W = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m_e} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \frac{m_e^2 Z^2 e^4}{16\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} = -\frac{m_e Z^2 e^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2}.$$

Luind  $\hbar = h/2\pi$ , găsim

$$W = -\frac{m_e Z^2 e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2},$$

care este identică cu expresia (6.10) pentru energia stării staționare din teoria lui Bohr, pentru cazul cînd numărul cuantic principal  $n = 1$  și  $Z = 1$ .

Să aplicăm acum atomului de hidrogen noțiunea de probabilitate, exprimată prin relația  $dP = |\Psi|^2 dV$ . Se observă că probabilitatea pentru ca electronul să se găsească în pătura sferică avînd razele  $r$  și  $r + dr$ , este proporțională cu  $|\Psi|^2 4\pi r^2 dr$ , deoarece  $dV = 4\pi r^2 dr$ .

Presupunînd că pentru un atom de hidrogen se cunoaște forma lui  $|\Psi|^2$ , densitatea de probabilitate  $P_r = dP/dr$  pentru ca electronul să se afle la distanța  $r$  de nucleu este

$$P_r = |\Psi|^2 r^2.$$

Modul în care variază  $P_r$  cu distanța  $r$ , pentru cazurile în care numărul cuantic principal  $n = 1, 2$  și  $3$  este arătat în figura 6.26.

Imaginea mecanicii ondulatorii, privind atomul de hidrogen, extinsă și la atomii mai complicați, este diferită

de teoria modelului cuantic a lui Bohr sau Sommerfeld. În noua mecanică cuantică se consideră că electronul are o anumită probabilitate pentru ca să se afle la o anumită distanță față de nucleu, poziția exactă fiind necunoscută, ca urmare a acțiunii principiului de incertitudine<sup>3</sup>.

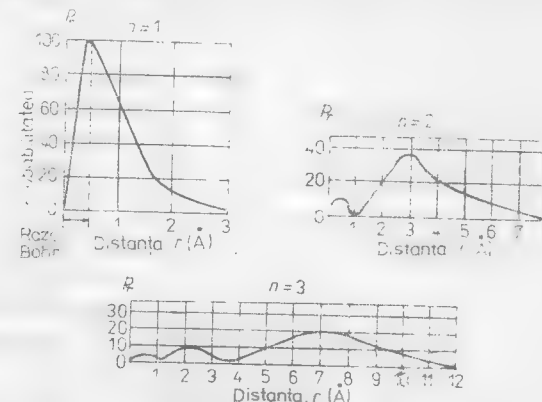


Fig. 6.26.

Într-adevăr, așa cum rezultă din graficele din figura 6.24, este mică atât probabilitatea ca electronul să se afle la o distanță foarte mică, cit și probabilitatea de a se afla la o distanță mai mare decît raza primei orbite Bohr. Poziția cea mai probabilă de existență a electronului este aceea unde  $P_r$  este maximă. Pentru  $n = 1$  și considerînd pentru atomul de hidrogen o simetrie sferică, se poate lua  $\Psi$  de forma:  $\Psi = \exp(-ra)$ . Se obține

$$P_r = \text{const } |\Psi|^2 r^2 = \text{const } r^2 \exp(-2ra).$$

Valoarea maximă a lui  $P_r$  se obține cînd  $r = r_1$ , unde

$$\frac{d}{dr} [r^2 \exp(-2ra)] = 0,$$

de unde

$$-2a \exp(-2r_1 a) r_1^2 + 2r_1 \exp(-2r_1 a) = 0$$

și deci  $r_1 = 1/a$ .

<sup>3</sup> Postulînd limita aplicării noțiunilor din mecanica clasică la studiul particulelor elementare, principiul de incertitudine al lui Heisenberg afirmă că este imposibil să cunoaștem cu precizie nelimitată și simultan, atât coordonatele cit și viteza microparticulei.

Înlocuind pe  $a$  cu expresia dată de (6.29), găsim

$$r_1 = \frac{4\pi h^2 \epsilon_0}{m_e Z e^2} = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2},$$

care este aceeași cu expresia razei orbitei Bohr, pentru cazul  $n = 1$  și  $Z = 1$ .

## 6.2. Modele nucleare

### 6.2.1. Probleme generale privind nucleul atomic

Primele date cu privire la existența nucleului sînt cunoscute din experiențele lui Rutherford, referitoare la difuzia particulelor  $\alpha$ , la trecerea lor prin foițe metalice subțiri. S-a constatat că nucleul este încărcat electric pozitiv și că în el este concentrată aproape întreaga masă a atomului.

Sînt cunoscute mai multe mărimi ce caracterizează nucleul atomic. Prima dintre caracteristici este sarcina nucleului, egală cu produsul dintre numărul atomic  $Z$  și sarcina elementară  $e$ , ceea ce reprezintă un multiplu întreg al sarcinii protonului.

A doua caracteristică este masa nucleului, egală cu diferența dintre masa atomului și masa electronilor săi. Conform ipotezei lui Ivanenko și Heisenberg, confirmată ulterior prin numeroase experiențe, nucleul este format din  $A$  particule, numite nucleoni, dintre care  $Z$  sînt protoni, și  $N = A - Z$  neutroni. Masa nucleelor se măsoară în unități atomice de masă reprezentînd  $1/12$  din masa izotopului  $C^{12}_6$ . Masa nucleului, rotunjită la un întreg, poartă numele de număr de masă și este egal cu numărul de particule  $A$  din nucleu.

Dimensiunea, respectiv volumul este o altă mărime caracteristică fiecărui nucleu. Dacă  $A$  este numărul nucleonilor din nucleu, admitînd în primă aproximație că nucleul are formă sferică, variate experiențe conduc astăzi la valoarea razei nucleului

$$R = R_0 A^{1/3},$$

unde  $R_0 = (1,2 \div 1,3) \cdot 10^{-15}$  m, care arată că volumul nucleului variază liniar cu numărul de masă. Calculul densității nucleare a arătat că aceasta este de ordinul a

$10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>, fiind aceeași pentru toate nucleele. Este o valoare extrem de mare a densității, dacă ne gîdim că densitatea medie a Pămîntului este de 5500 kg/m<sup>3</sup>.

Ca și electronul, particulele ce compun nucleul au fiecare un moment cinetic orbital  $\sqrt{l(l+1)} h/2\pi$  și un moment cinetic de spin  $\sqrt{s(s+1)} h/2\pi$ . Suma vectorială a momentelor cinetice orbitale și de spin ale nucleonilor dă momentul cinetic total  $\vec{I}$ , numit impropriu și spinul nuclear, care reprezintă, de asemenea, o caracteristică a fiecărui nucleu. Valoarea spinului nuclear este determinată de numărul de masă  $A$ . Dacă  $A$  este par, spinul nuclear este zero sau un număr întreg, iar cînd  $A$  este impar, spinul nuclear este un număr semiîntreg.

Datorită rotației în jurul propriei axe, mișcarea nucleului este echivalentă cu un curent circular, posedînd un moment magnetic propriu

$$\mu = \gamma \sqrt{I(I+1)} \frac{h}{2\pi},$$

unde  $I$  este numărul cuantic de spin, iar  $\gamma$  se numește factor giromagnetic.

În sfîrșit, datorită distribuției nesimetrice a protonilor în nucleu, acesta posedă un moment electric cvadripolar, care apare atunci cînd în locul distribuției sferice a sarcinilor electrice, acestea se distribuie aproximativ sub forma unui elipsoid.

După ce a devenit cunoscută structura nucleului și așume că în nucleu coexistă într-un volum extrem de mic atît neutroni, cît și protoni, s-a pus problema de ce aceștia nu se resping între ei, ceea ce ar duce în final la instabilitatea nucleelor.

Faptul însă că majoritatea nucleelor sînt stabile arată că în afară de forțele de interacțiune electrostatică, între nucleonii din nucleu trebuie să se manifeste și un alt tip de forțe, de intensitate mult mai mare, care să anihileze interacțiunea electrostatică.

Acest lucru a devenit evident chiar în experiențele de difuzie a particulelor  $\alpha$ , care au arătat că acestea, atunci cînd au o energie suficient de mare și se apropie la o distanță de ordinul a  $10^{-15}$  m de nucleu, particulele  $\alpha$  nu mai sînt respinse de nucleu, ci atrase de acesta, deși atît sarcina nucleului cît și cea a particulelor  $\alpha$  au același semn.

Reprezentind pe un grafic variația energiei potențiale a sistemului nucleu-particulă proiectil, când aceasta se apropie de nucleu, în funcție de distanță, se obține graficul din figura 6.27. Se observă că atunci când energia cinetică a particulei proiectil, chiar dacă este un proton sau o particulă  $\alpha$ , nu este prea mare, la apropierea de nucleu,

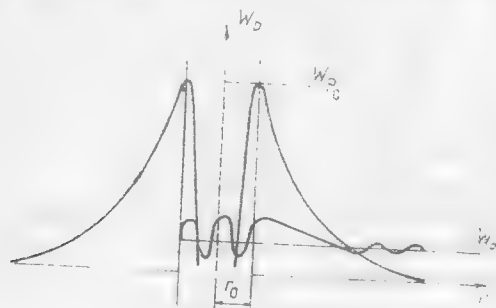


Fig. 6.27.

particula respectivă este respinsă de acesta. Energia potențială a sistemului nucleu-particulă, la o distanță suficient de mare, fiind

$$W_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r},$$

se obține  $W_p r = \text{const}$  și deci alura curbei de variație a energiei potențiale va fi de forma unei hiperbole echilaterale, asimptotă la axa ordonatelor  $W_p$  și la axa absciselor  $r$ .

În cazul când energia cinetică a particulei este suficient de mare, pentru a se putea apropia de nucleu la distanța  $r < r_0$ , curba de variație a energiei potențiale suferă o cădere bruscă, ceea ce arată că în acest caz, locul forței de respingere electrostatică este luat de un nou tip de forță, numită forța de atracție nucleară. Se observă că pentru ca o particulă proiectil încărcată pozitiv să intre sau să iasă din nucleu, ar trebui să posede o energie cinetică cel puțin egală cu valoarea  $W_p$ , maximul barierei de potențial, adică maximul energiei potențiale a curbei ce desparte cele două domenii, nucleul și exteriorul său.

Experiența a arătat însă că este posibil ca o particulă proiectil, de exemplu o particulă  $\alpha$ , să poată pătrunde în nucleu, chiar dacă are o energie cinetică mai mică decât înălțimea barierei de potențial  $W_p$ . Acest lucru a fost

explicat de G. Gomow, pe baza mecanicii ondulatorii. Datorită proprietăților sale ondulatorii, particula  $\alpha$  se poate infiltra prin bariera de potențial care are înălțimea  $W_p > W_a$ , fenomenul purtând numele de efect tunel.

Revenind la noțiunea de forță de atracție nucleară, menționăm că aceasta se definește ca forța ce se exercită între nucleonii din nucleu. Deși natura exactă a acestor forțe nu este pe deplin lămurită, se cunosc o serie de proprietăți ale acestora. Ele sînt forțe mari pe distanțe foarte scurte, în sensul că se manifestă pînă la distanțe de  $10^{-15}$  m, după care devin practic nule<sup>4</sup>. Aceste forțe sînt independente de sarcină, ceea ce înseamnă că ele acționează între nucleoni, indiferent dacă sînt sau nu încărcăți, intensitatea acestor forțe fiind independentă de sarcina nucleonilor. Proprietatea de saturare a acestor forțe arată că un nucleon interacționează cu un număr limitat de nucleoni vecini, întocmai cum o moleculă de apă, de exemplu, interacționează numai cu moleculele din sfera de acțiune moleculară. De asemenea, aceste forțe depinzînd atît de vectorul de poziție, cît și de orientarea spinilor nucleonilor, forțele nucleare sînt în același timp și forțe spinoriale.

Deși au fost emise diferite teorii care încearcă să explice natura acestor forțe nucleare, nici una nu reușește să explice toate faptele experimentale observate. Astfel teoria lui Heisenberg, postulînd faptul că forțele nucleare sînt forțe de schimb, consideră că atît protonul cît și neutronul sînt două stări cuantice ale aceleiași particule — nucleonul. Conform acestei teorii, în nucleele  $\beta$ -nestabile, interacțiunea dintre nucleoni are un caracter corpuscular și schimbă între ei pozitroni, electroni și neutroni, nucleonii trecînd dintr-o stare cuantică în alta, conform schemei,

$$p \rightleftharpoons n + e_{+1}^0 + \nu, \quad n \rightleftharpoons p + e_{-1}^0 + \bar{\nu},$$

unde  $\nu$  și  $\bar{\nu}$  sînt particula neutrîn, respectiv antineutrîn. Calculele efectuate folosind aceste teorii dau valori de  $10^{10}$  ori mai mici pentru forța de interacțiune decît forțele nucleare reale.

Reconsiderînd problema particulei de schimb, Yukawa consideră că aceasta este mezonul  $\pi$ , astfel încît trecerea protonului în neutron și invers se face prin schimbul virtual de mezoani, schimb care se face în mod continuu. Aceasta ar însemna ca un nucleon să emită un mezon și tot

<sup>4</sup> Distanța  $10^{-15}$  m = 1 f se numește femtometru.



el să-l absoarbă din nou. Există însă serioase îndoieli cu privire la existența unui asemenea joc. Teorii mai noi afirmă că mezonii pot exista sub forma unor cimpuri mezonice, în care probabilitatea de transformare a nucleonului dintr-o formă în alta este suficient de mare. În orice caz, proprietățile forțelor nucleare arată că structura nucleului trebuie concepută în strinsă legătură cu modul de aranjare al nucleonilor în nucleu.

Făcând o comparație între cunoștințele privind atomul cu cele ce privesc nucleul, acestea din urmă sînt mult mai reduse, din mai multe motive. În timp ce între electroni și nucleu acționează forțe electromagnetice, fiind pusă la punct o teorie care explică suficient de bine faptele experimentale, datorită necunoașterii cu suficientă precizie a naturii forțelor nucleare, nu a putut fi construită pînă acum o teorie a nucleului, în acord cu toate datele experimentale. În același timp, pentru nucleele conținînd un număr mare de nucleoni este imposibil de construit funcția de undă  $\psi$ , întrucît aceasta depinde de un număr mare de variabile. Problema este echivalentă cu a spune că este foarte dificil, dacă nu chiar imposibil, de calculat ecuațiile care descriu mișcările nucleonilor din nucleu. De asemenea, deoarece unele nuclee conțin un număr prea mic, iar altele un număr foarte mare de nucleoni, face imposibilă o teorie unitară, de exemplu statistică, pentru a putea fi studiate toate gradele de libertate ale nucleonilor.

Pentru reducerea acestor dificultăți și din necesitatea de a concepe o structură și o dinamică internă a nucleului, au fost imaginate o serie de modele nucleare, fiecare caracterizînd anumite proprietăți ale nucleului, nici unul nefiind capabil însă să interpreteze toate faptele experimentale privitoare la nucleu. În general modelele nucleare s-au dezvoltat în trei direcții: una, considerînd un cuplaj puternic între părțile constitutive ale nucleului, o a doua direcție, în care se consideră că nucleonii sînt particule independente și deci interacțiunea dintre ei este slabă, iar a treia direcție, mixtă, le cuprinde pe primele două. În cele ce urmează vom discuta pe scurt unele dintre aceste modele.

### 6.2.2. Modelul picătură

Modelul picătură, imaginat de Gamow și propus de N. Bohr, are la bază analogia dintre nucleu și o picătură de

lichid incompresibil. Din această analogie se desprind o serie de trăsături comune:

1. Atît densitatea picăturii cît și a nucleului sînt mărimi constante, independente de dimensiunea picăturii, respectiv a nucleului.

2. Fenomenului de evaporare a picăturii de lichid (pierderea de molecule) îi corespunde fenomenul de radioactivitate ale unor nuclee, iar agitației termice a moleculelor dintr-o picătură de lichid îi corespunde energia cinetică a nucleonilor din nucleu.

3. Căldurii latente de vaporizare a lichidului ce formează picătura îi corespunde energia de legătură pe nucleon, fiind o caracteristică a nucleului.

4. Atît moleculele din picătura de lichid cît și nucleonii din nucleu au proprietatea de a interacționa numai cu moleculele, respectiv cu nucleonii cei mai apropiați (proprietatea de saturație).

5. O altă proprietate comună se referă la faptul că atît picătura cît și nucleul prezintă fenomenul de tensiune superficială, în sensul că asupra unei molecule aflată pe suprafața picăturii sau a unui nucleon aflat la marginea nucleului, acționează forțe de atracție din interior.

În afară de aceste asemănări, între o picătură de lichid și un nucleu există și deosebiri esențiale. De exemplu, în timp ce între moleculele unei picături aflate în stare neutră se manifestă numai forțe de atracție, între nucleonii dintr-un nucleu există și forțe de respingere electrostatică, ceea ce reduce stabilitatea nucleelor.

Importanța principală a acestui model constă în aceea că el a permis scrierea unei relații semiempirice, cu ajutorul căreia se poate calcula energia de legătură a nucleului. În fond ce reprezintă această energie? Calculînd cu multă precizie masa nucleului și masa particulelor ce compun nucleul respectiv, se constată că la scara microcosmosului, „întregul nu este egal cu suma părților”. Mai precis, suma maselor de repaus ale particulelor ce compun nucleul este mai mare decît masa nucleului respectiv,

$$Zm_p + (A - Z)m_n > m,$$

unde  $m_p$  și  $m_n$  sînt masa protonului, respectiv a neutronului, iar  $m$  este masa nucleului.

Diferența

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m \quad (6.30)$$

se numește defect de masă. Acest fenomen apare întotdeauna când protonii și neutronii în repaus se unesc pentru a forma nucleul. Pe de altă parte, se cunoaște din teoria relativității restrinse că energia de repaus a unui corp este  $W = m_0 c^2$ , astfel încât

$$[Zm_p + (A - Z)m_n]c^2 - mc^2 = \Delta W \quad (6.31)$$

reprezintă micșorarea energiei de repaus a nucleonilor la unirea lor pentru a constitui un nucleu. În mod asemănător, la desfacerea nucleului în părțile sale componente, nucleul trebuie să primească o energie egală cu  $\Delta W$ . Din acest motiv  $\Delta W$  a primit numele de energie de legătură.

Întrucât valoarea energiei de legătură  $\Delta W$  este foarte mare, de ordinul zecilor și chiar sutelor de MeV (1 MeV =  $10^6$  eV)<sup>5</sup>, mult mai mare decât energia de legătură a electronilor de nucleu, această energie se poate neglija (este de ordinul citorva keV; 1 keV =  $10^3$  eV) și relația (6.30) se înlocuiește cu

$$\Delta W = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n]c^2 - Mc^2,$$

unde  $M$  este masa atomului, care include și masa tuturor electronilor atomului.

Din relația (6.31) se constată că valoarea energiei de legătură a nucleului depinde de masa acestuia. Se definește energia de legătură pe nucleon, ca energia de legătură totală împărțită la numărul total de nucleoni,  $\Delta W/A$ .

Valoarea energiei pe nucleon variază de la un atom la altul, în figura 6.28 redându-se modul în care variază  $\Delta W/A$  în funcție de  $A$ . Se constată, de asemenea, că energia pe nucleon variază mult pentru nucleele având  $1 \leq A < 20$ , pentru nuclee având  $20 \leq A < 60$  această energie crește ușor de la 8 MeV la 8,5 MeV, iar pentru  $A \geq 60$  energia scade înapoi la 7,5 MeV. Energia de legătură pe nucleon este o măsură a stabilității nucleelelor, în sensul că nucleele mai stabile au  $\Delta W/A$  mai mare. Din figura 6.28 se observă că nucleele având  $20 \leq A < 60$  sunt mai stabile decât nucleele ușoare și nucleele grele. Celelalte nuclee fiind mai instabile, au energia de legătură mai mică, ceea ce

<sup>5</sup> Electron-voltul (eV) este energia pe care o capătă electronul sau o altă particulă având sarcina egală cu a electronului, atunci când traversează distanța dintre două puncte, între care este o diferență de potențial egală cu un volt; 1 eV =  $1,602 \cdot 10^{-19}$  Jouli.

permis folosirea lor, cele ușoare la sinteza nucleară, iar cele mai grele la fisiunea nucleară.

Să vedem acum care sunt termenii ce compun relația semiempirică, cu ajutorul căreia se poate calcula energia de legătură a nucleului.

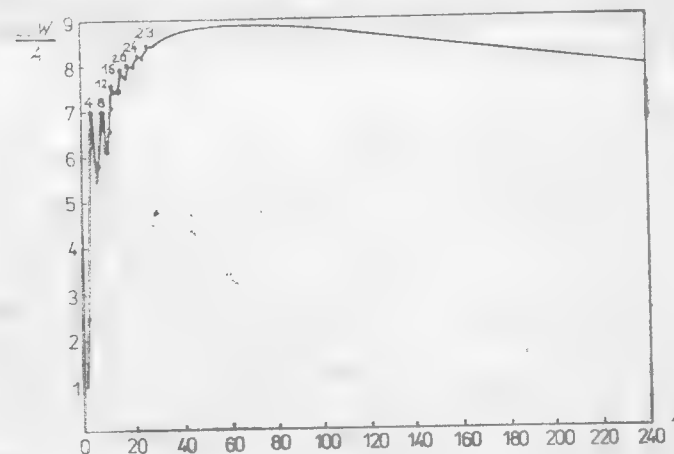


Fig. 6.28.

Deoarece atât densitatea nucleară cât și energia de legătură pe nucleon sunt mărimi constante, cea mai importantă contribuție la energia de legătură a nucleului se datorează energiei de interacțiune (atracție) care este proporțională cu numărul de nucleoni  $A$ ,

$$\Delta W_1 = a_1 A,$$

unde  $a_1$  este o constantă.

Efectul forței de atracție dintre nucleoni este diminuat de către forțele de respingere coulombiană dintre cei  $Z$  protoni. Din acest motiv, al doilea termen în energia de legătură depinde de energia potențială dintre protonii din nucleu, energie proporțională cu  $Z^2 e^2 / R$ . Deoarece  $R = R_0 A^{1/3}$ , cel de al doilea termen este

$$\Delta W_2 = -a_2 Z^2 A^{-1/3},$$

unde  $a_2$  este a doua constantă, semnul minus arătând că acest termen micșorează energia de legătură.

Pentru scrierea celui de al treilea termen ce contribuie la energia de legătură, vom ține seama direct de una din

asemănările dintre nucleu și o picătură de lichid și anume de proprietatea de saturație. Când a fost scris primul termen  $\Delta W_1$ , am considerat că toți nucleonii sînt atrași în mod egal în toate direcțiile, lucru care nu este adevărat pentru nucleonii aflați la suprafața nucleului. Așadar, acest termen este echivalent tensiunii superficiale din cazul picăturii de lichid, deci proporțional cu suprafața nucleului sferic.

$$\Delta W_3 = -a'_3 R^2 = -a_3 A^{2/3},$$

unde  $a'_3$  și  $a_3$  sînt noi constante, semnul minus arătînd că și acest termen micșorează energia de legătură.

Al patrulea termen se datorează lui Fermi și el a fost introdus pentru a ține seama de sistematica nucleelor stabile. Nucleele cu  $A$  mare, au  $N > Z$ , iar respingerea electrostatică mare, așa cum se observă la nucleele grele. Termenul respectiv este de forma

$$\Delta W_4 = a_4 \frac{(Z - A/2)^2}{A},$$

care se anulează cînd  $Z = N = A/2$ , și crește, cînd excesul de neutroni față de protoni crește și el.

În sfîrșit, al cincilea termen ține seama de faptul că nucleele par-pare ( $Z$  și  $N$  sînt numere pare) sînt cele mai stabile, nucleele impar-impar sînt cele mai instabile, în timp ce nucleele par-impar sau impar-pare au o stabilitate cuprinsă aproximativ între primele două tipuri. Este vorba de fapt de o corecție  $\delta$ , de valoare foarte mică, unde  $\delta = 0$  pentru nucleele cu  $A$  impar (par-impar sau impar-pare),  $\delta = +a_5 \cdot A^{-3/4}$ , pentru  $Z$  par,  $A$  par sau  $\delta = -a_5 A^{-3/4}$  pentru  $Z$  impar,  $N$  impar,  $A$  par, unde  $a_5$  este o nouă constantă.

Introducînd într-o singură relație toți termenii, se obține

$$\Delta W = a_1 A - a_2 Z^2 A^{-1/3} - a_3 A^{2/3} + a_4 \frac{(Z - A/2)^2}{A} + \delta, \quad (6.32)$$

numită formula semiempirică a lui Weizsäcker, ce dă energia de legătură în MeV. Împărțind prin  $A$  relația de mai sus, se obține  $\Delta W/A$ , adică energia pe nucleon, care este în bună concordanță cu curba din figura 6.28.

Datorită proprietății de saturație a forțelor nucleare, distribuția protonilor și neutronilor în interiorul nucleului trebuie să fie aproximativ aceeași. Aceasta înseamnă că și distribuția sarcinii electrice în interiorul nucleului trebuie să fie astfel încît ea să scadă o dată cu diminuarea densității de sarcină în stratul superficial. Curba din figura 6.29 arată modul în care este distribuită densitatea de sarcină electrică în nucleu, în funcție de distanța față de centrul nucleului.

Modelul picătură presupune existența unei mișcări colective a nucleonilor în nucleul-picătură și deci și oscilații superficiale, oscilații ale densității substanțelor compresibile etc. Presupunem că în stare de echilibru, nucleul picătură are forma sferică. Întrucît „lichidul nuclear” este incompresibil, datorită densității materiei nucleare, presupusă constantă, mișcările colective ale nucleonilor vor duce la deformarea suprafeței picăturii, fără variații de volum (fig. 6.30). Calculînd energia de oscilație în cazul în care nucleul este deformat de la forma sferică, se constată că această energie este cu mult mai mare decît valoarea critică a energiei necesară stabilității unor nuclee. Valoarea critică se obține atunci cînd parametrul de fisiune

$$\frac{Z^2}{A} \approx 45.$$

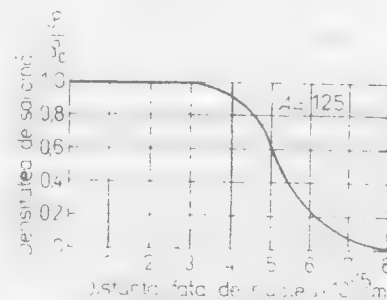


Fig. 6.29.

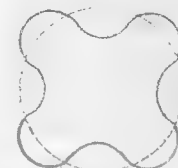


Fig. 6.30.

La această valoare fisiunea spontană s-ar produce practic instantaneu dacă nu intervin și alți factori, care pot conduce la nuclee stabile cu  $Z$  mult mai mare. Pentru  $U_{92}^{235}$  parametrul de fisiune este  $Z^2/A \approx 36$ , astfel încît pentru acest nucleu este totuși posibilă fisiunea spontană, dar

cu timpul de înjumătățire foarte mare, deci cu probabilitate mică dar nenulă.

Așadar, cu ajutorul modelului picătură poate fi explicat procesul de fisiune, expulzarea nucleonilor din nucleu și stabilitatea nucleelor. Cu toate că acest model este simplu și intuitiv, el nu poate da decât o descriere parțială a comportării nucleelor, a căror structură este mult mai complexă, față de orice imagine clasică. Nepuținându-se explica decât unele fenomene nucleare, altele, cum ar fi momentele magnetice, stările excitate, nivelele energetice ale nucleelor etc. neprimind o explicație satisfăcătoare, a făcut necesar dezvoltarea altor modele de nucleu, care să înlăture dificultățile de mai sus.

### 6.2.3. Modelul în pături

Formula semiempirică a lui Weizsäcker descrie cu suficientă aproximație modul în care variază energia de legătură pe nucleon, în funcție de  $A$  și  $Z$ . Studiul graficului din figura 6.28 arată totuși că această variație nu este monotonă, apărind o serie de maxime și minime pentru anumite valori ale lui  $Z$ . Se constată că nucleele care au energia de legătură minimă, conțin un număr de nucleoni de același tip (protoni sau neutroni), egal cu unul dintre numerele 2, 8, 20, 28, 50, 82 sau 126 nucleoni. În general, nucleele care conțin un număr de nucleoni egal cu unul din numerele seriei de mai sus sunt nuclee foarte stabile, cum sunt:  $O_8^{16}$  (conține 8  $p$  și 8  $n$ ),  $Ca_{20}^{40}$  (conține 20  $p$  și 20  $n$ ),  $Ni_{28}^{60}$  (conține 28  $p$  și 32  $n$ ),  $Sn_{50}^{120}$  (conține 50  $p$  și 70  $n$ ),  $Pb_{82}^{208}$  (conține 82  $p$  și 126  $n$ ) etc.

Întrucât numerele din seria 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 au primit numele de numere magice, nucleele care au numărul protonilor sau al neutronilor egal cu unul din aceste numere se numesc nuclee magice, în timp ce nucleele care au atât numărul de protoni cât și numărul de neutroni numere magice, se numesc dublu magice. Atât nucleele magice, dar mai ales cele dublu magice, pe lângă stabilitate deosebită au și o răspindire foarte mare în natură, fiind formate dintr-un număr relativ mare de izotopi. Așa, de exemplu, calciul are 6 izotopi stabili, staniul este format din 10 izotopi stabili, iar plumbul nu întimplător este produsul final al tuturor seriilor radioactive naturale.

În același timp, se cunoaște că atomii care au în păturile electronice un număr de electroni egal cu 2, 10, 18, 36, 54 sau 86 sunt atomi deosebit de stabili, formând grupa gazelor rare. Prin analogie cu păturile electronice ale atomului, s-a admis ipoteza că o asemenea configurație o pot avea și nucleonii în nucleul atomic. Ideea de bază a unui astfel de model, numit modelul în pături, constă în aceea că nucleonii ce formează nucleul se aranjează pe anumite pături, lucru care explică, ca și la atomi, existența unei periodicități în proprietățile nucleelor.

Faptul că nucleonii sunt aranjați în pături nucleare conduce, de asemenea, la ipoteza existenței și în nucleu a unor nivele de energie, asemănătoare nivelelor energetice ale electronilor din atom. Acest lucru înseamnă de fapt că între nucleoni există o slabă interacțiune, cu alte cuvinte nucleonii se pot deplasa în nucleu ca niște particule independente.

Se presupune, ca și la atomi, că nivelele de joasă energie sunt complete în starea fundamentală, fiind posibile, în cazul nucleelor nestabile, numai acele interacțiuni care duc la trecerea unuia sau a mai multor nucleoni, pe nivele neocupate. Ocupînd nivele energetice distincte, distribuția nucleonilor în nucleu este guvernată de principiul de exclusiune a lui Pauli. Conform acestui principiu, fiecare nivel nu poate fi ocupat decât de cel mult 2 nucleoni de același tip, cu spini antiparaleli.

Starea fiecărui nucleu poate fi descrisă de o funcție de undă și de un grup adecvat de numere cuantice. Problema care se pune este de a explica structura nivelelor energetice ale nucleonilor din nucleu, folosind limbajul teoriei undulatorii a lui Schrödinger. A determina nivelele energetice ale nucleonilor înseamnă a rezolva ecuația lui Schrödinger pentru sistemul de nucleoni ce formează nucleul, în condițiile necunoașterii exacte a formei energiei potențiale de interacțiune dintre nucleoni. Pentru simplitate, Elsas-ser a presupus încă în 1934 că fiecare nucleon se mișcă independent în câmpul mediu al celorlalți  $A - 1$  nucleoni, într-o groapă de potențial dreptunghiulară. Lucrînd în coordonate sferice, se poate alege ca funcția de undă  $\Psi$  să depindă numai de raza  $r$ , astfel încît din ecuația generală

(6.23) a lui Schrödinger să folosim numai ecuația (6.24), în care  $\Psi = \Psi(r)$ ,

$$\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\Psi(r)}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} [W - W_p] \Psi(r) = 0,$$

unde  $m$  este masa unui nucleon.

Pentru a rezolva această ecuație, trebuie să-l cunoaștem pe  $W_p(r)$ . Luăm  $W_p(r)$  sub forma cea mai simplă, dată de un oscilator armonic liniar,

$$W_p(r) = \frac{1}{2} k r^2 + \text{const.}$$

căreia îi corespunde un potențial de formă parabolică.

Soluțiile pentru ecuația de undă a lui Schrödinger, în situația cînd energia potențială se ia sub forma de mai sus, conduc pentru valorile proprii ale energiei, la expresii de forma

$$W_n = h\nu \left( n + \frac{3}{2} \right),$$

unde  $n$  este numărul cuantic principal.

Folosind forma de mai sus a potențialului, se ajunge la concluzia că completarea păturilor s-ar face cu nucleoni al căror număr pe aceste pături este în ordine 2, 8, 20, 40, 70, 112. După cum se vede, se găsește în acest fel doar primele trei numere magice, ceea ce arată că modelul prezentat este bun doar pentru nucleele ușoare. În același fel au fost construite soluții valabile numai pentru nucleele grele.

O soluție oarecum intermediară a fost propusă de Mayer și Jensen, care consideră că cele două tipuri de nucleoni (protoni și neutroni) formează două sisteme de particule independente, deci păturile neutronice și protonice se completează independent. Aceasta înseamnă că fiecare nucleon de un anumit tip (proton sau neutron) se consideră că se mișcă într-un câmp mediu, format prin suprapunerea a două câmpuri, corespunzătoare celor două tipuri de nucleoni. S-a calculat și în această ipoteză forma potențialului, dar, pentru a obține toate numerele magice în ordinea lor, a trebuit să se presupună existența unui cuplaj spin-orbită foarte puternic între nucleoni, deter-

minind o despicare a nivelelor nucleare, adică apariția unei „structuri fine nucleare”.

Deși modelul în pături descrie destul de bine nucleele ușoare, explică izomeria nucleară<sup>6</sup>, tranzițiile nucleare radiative, paritatea nucleelor etc., el nu poate explica fenomenul de fisiune, comportarea nucleelor puternic excitate etc., ceea ce arată că nici acest model nu este complet.

#### 6.2.4. Alte modele nucleare

Atît modelul picătură cît și modelul în pături pot explica fiecare numai o parte din fenomenele legate de nucleu. Încercînd, de exemplu, să se calculeze valoarea momentului magnetic nuclear sau a momentului electric cvadripolar al nucleului pentru elementele mai grele, cu ajutorul modelului în pături, s-au găsit abateri relativ mari față de determinările experimentale. În plus, măsurătorile arată că momentul electric cvadripolar este zero pentru nucleele ce au numărul de nucleoni egal cu un număr magic, este pozitiv la nucleele care au  $Z = Z_{\text{magic}} - 1$  și negativ la care  $Z = Z_{\text{magic}} + 1$ .

Explicarea a fost dată în 1952 de către A. Bohr și B. Mottelson care au propus modelul generalizat (unificat) de nucleu, model în care se îmbină aspectele pozitive ale celor două modele de nucleu, discutate mai sus. S-a plecat de la semnificația fizică a momentului electric cvadripolar și anume că acesta este o măsură a abaterii nucleului de la simetria sferică.

Modelul generalizat concepe nucleul ca format dintr-un miez ce conține toți nucleonii de pe păturile complete, în timp ce nucleonii păturilor exterioare incomplete se mișcă cvasiindependent în câmpul mediu al miezului, care poate să se modifice foarte lent. În acest fel, miezul nucleului este asimilat unei picături deformabile de lichid nuclear incompresibil, iar nucleonii exteriori, care produc deformarea nucleului, sînt tratați în conformitate cu modelul în pături. Se consideră că nucleonii ce formează miezul nucleului au o mișcare colectivă, miezul mișcîndu-se ca un întreg, iar nucleonii exteriori au o mișcare independentă.

<sup>6</sup> Se numesc nuclee izomere acele nuclee care, conținînd un număr egal de protoni și neutroni, diferă printr-o serie de proprietăți fizice, cum sînt: timpul de înjumătățire, energia de legătură, momentul cinetic de spin etc.

Cele mai stabile nuclee sînt de formă sferică, avînd păturile nucleonice complete. Pe măsură ce se adaugă noi nucleoni, aceştia se dispun pe o pătură deschisă, dînd naştere la suprafaţa nucleului la fluctuaţii ale potenţialului cîmpului creat de nucleu. Aceste fluctuaţii determină apariţia unei presiuni pe care nucleonii adăugaţi o exercită asupra miezului, ceea ce conduce la deformarea nucleului şi deci la instabilitatea lui. Deformarea nucleului creşte şi devine maximă, pînă cînd, pe pătura exterioară incompletă, sînt aproximativ  $2/3$  din totalul nucleonilor ce pot încăpea pe ea şi devine zero, cînd pătura este completă.

Neajunsul principal al modelului generalizat o constituie incapacitatea sa de a explica variaţia secţiunii eficace<sup>7</sup> de captură a neutronilor de către nucleu, la variaţia energiei neutronului incident. Datele experimentale arată că secţiunea eficace de captură prezintă o serie de maxime pentru anumite energii, ca şi cînd nucleul s-ar comporta ca un mediu optic, care ar avea valori diferite ale indicelui de refracţie pentru raze cu diferite lungimi de undă.

Problema a fost rezolvată prin propunerea modelului optic al nucleului, în care interacţiunea neutronilor cu nucleul este înlocuită printr-o energie potenţială de interacţiune. Această energie se ia sub formă complexă,  $W_p = W_{pe} + iW_{pi}$ , partea sa reală descriind reflexia şi refracţia nucleonilor, iar partea imaginară amortizarea undelor, datorită absorbţiei. Modelul descrie destul de bine rezultatele obţinute la difuzia neutronilor pe elemente relativ uşoare.

În încercarea de a explica alte fapte experimentale, au mai fost propuse şi alte modele de nucleu, cum ar fi modelul de gaz-Fermi, modelul alfa-particulă, modelul suprafluid, în total aproximativ 12 modele de nucleu. În încheiere, menţionăm că nici unul dintre modelele propuse nu tratează în întregime structura nucleului, o teorie unitară a nucleului nefiind realizată pînă azi, aceasta urînd să fie rezolvată în viitor.

<sup>7</sup> Secţiunea eficace este mărimea fizică egală cu probabilitatea ca un eveniment intranuclear să aibă loc. Are dimensiunile unei arii şi se măsoară în barni ( $1b = 10^{-28} m^2$ ). Secţiunea eficace de captură neutronică este secţiunea eficace a procesului de captură a neutronului de către nucleu.

## Capitolul 7. MODELAREA ÎN STUDIAREA CORPULUI SOLID

„Legile fizice trebuie să aibă frumuseţe matematică”.

DIRAC

### 7.1. Starea cristalină şi starea amorfă

Succesul modelului cinetic al gazului, în care acesta este considerat ca un ansamblu de particule, aflate într-o stare de mişcare dezordonată, şi rezultatele bune, obţinute prin extinderea modelului, cu unele ipoteze suplimentare, la studierea gazului real, au încurajat extinderea modelului la studierea fazelor lichidă şi solidă.

Cunoaştem că în stare naturală, substanţa se poate găsi într-una dintre cele patru stări de agregare: solidă, lichidă, gazoasă sau plasmă. Existenţa unei faze sau alta depinde de temperatură, de presiunea exterioară şi de alţi factori. În timp ce gazele umplu întreg volumul vasului în care se află şi sînt foarte compresibile, lichidele şi solidele au volume definite şi în comparaţie cu gazele sînt practic incompresibile. La rîndul ei, deşi la prima vedere se poate trata ca un gaz, plasma reprezintă totuşi o stare deosebită a materiei, formată din electroni, ioni, atomi, neutroni şi fotoni, aflaţi într-o neconţinută mişcare haotică. Există şi alte limite care determină luarea unor precauţii suplimentare, atunci cînd se încearcă extinderea modelului cinetic la solide.

De exemplu, în timp ce o moleculă de gaz se poate ciocni cu oricare altă moleculă din volumul de gaz considerat, o moleculă a corpului solid nu se poate ciocni decît cu moleculele din imediata vecinătate, atunci cînd temperatura solidului creşte.

Fiecărui corp solid aflat în natură îi corespunde o anumită temperatură şi o anumită presiune de formare. În momentul îndeplinirii acestor condiţii, structura internă a solidului se modifică pînă cînd sistemul atinge o



stare de echilibru termodinamic, moment în care energia sa liberă devine minimă.

Energia liberă  $F$  este o funcție termodinamică ca și energia internă  $U$ , entalpia  $S$  sau entalpia  $H$  a sistemului termodinamic, toate fiind funcții de variabile independente, care pot defini integral starea unui sistem termodinamic.

Din expresia matematică a principiului întâi al termodinamicii,

$$dQ = dU + dW,$$

și a principiului al doilea al termodinamicii,

$$dS \geq \frac{dQ}{T},$$

unde semnul  $=$  se referă la transformările reversibile, iar semnul  $>$  se referă la transformările ireversibile, rezultă

$$dS \geq \frac{dU + dW}{T}. \quad (7.1)$$

Pentru sistemele termodinamice naturale, adică sistemele neizolate, la care volumul  $V = \text{const}$  și care sînt în contact cu un termostat, un rol important îl joacă energia liberă,

$$F = U - TS.$$

Dacă ținem seama de relația (7.1), rezultă

$$dF = dU - TdS - SdT \leq dW - SdT.$$

Cum în cazul sistemelor neizolate  $V = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ , rezultă

$$dF \leq 0,$$

ceea ce înseamnă de fapt că la solide, la care variația volumului cu presiunea este mică, înseamnă că starea de echilibru se atinge atunci cînd energia liberă atinge valoarea minimă. Experiența arată că starea stabilă de echilibru se caracterizează printr-un minim absolut al energiei libere și ea corespunde așa-numitei stări cristaline a solidului. Întrucît starea stabilă se obține cînd  $\delta F = 0$ , adică  $\delta(U - TS) = 0$ , stările de echilibru la  $T > 0$  implică în mod obligatoriu prezența defectelor ( $S \neq 0$ ) (v. § 7.4).

În afară de starea stabilă, în timpul schimbării structurii sale, un solid poate trece printr-o succesiune de stări

metastabile, care corespund unor minime relative ale energiei libere, în care timp, solidul respectiv se află în stare amorfă. O primă clasificare a solidelor ar fi deci: starea amorfă și starea cristalină, în funcție de valoarea minimumului energiei libere a stării respective.

Solidele amorse se caracterizează prin izotropia proprietăților fizice, inexistența unor temperaturi constante de topire și existența unei așa-numite ordini locale, care constă în dispunerea ordonată a atomilor în jurul unui atom dat pînă la distanțe de ordinul a citorva diametre moleculare.

Solidele cristaline se caracterizează prin anizotropia proprietăților fizice, temperatură constantă de topire și existența unei ordini la distanță, aceasta fiind o repetiție a ordinii locale în toată masa solidului.

## 7.2. Forțe de legătură

Experiența arată că atomii care formează solidul sînt strîns legați unul de altul, fără însă a exista tendința de apropiere sau de respingere între ei. Este vorba așadar de o coeziune între atomii solidului, datorată forțelor de legătură dintre acești constituenți forțe ce asigură stabilitatea mecanică și termodinamică a sistemului de solid considerat.

Din acest motiv, un model de solid trebuie să ia în considerare cel puțin două tipuri de forțe: forțe de atracție dintre atomii aflați la distanțe mari față de dimensiunile atomului și forțe de respingere, cînd distanța dintre atomi este mică. În funcție de natura acestor forțe, se poate face o clasificare a cristalelor. Alte tipuri de cristale care mai există se datorează distribuției diferite a electronilor și nucleelor în cristale.

Forțele de atracție dintre atomi sînt de natură electrostatică și o clasificare a diferitelor tipuri de legături este strict dependentă de structura electronică a atomilor respectivi. S-au convenit, din acest punct de vedere, patru tipuri de legături, deși nu se poate trasa o graniță strictă între acestea: legătură ionică, legătură covalentă, legătură moleculară și legătură metalică sau legătura covalentă nesaturată.

Forța de atracție dintre atomi se datorează electronilor din stratul periferic și în momentul în care forța de atracție dintre doi atomi este egală cu forța de respingere, atunci

sistemul format din cei doi atomi va fi într-o situație când energia sa potențială este minimă și deci sistemul se află într-o stare de echilibru stabil. Distanța dintre atomi la care se realizează acest echilibru poartă numele de distanță de echilibru și este de ordinul constantei rețelei cristaline,  $r_0 \approx 10^{-10}$  m.

Presupunem doi atomi aflați în stare fundamentală, la o distanță între ei care poate fi considerată infinită în raport cu dimensiunile atomilor, moment în care energia lor potențială este nulă. Aducând atomii în apropiere unul de altul, energia potențială a fiecărui atom va fi dată de

$$V = \left( \begin{array}{c} \text{descreșterea energiei} \\ \text{potențiale datorată} \\ \text{atractivei} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{creșterea energiei} \\ \text{potențiale datorată} \\ \text{repingerii} \end{array} \right)$$

și în cazul unui tip simplu de potențial interatomic, acest lucru se scrie

$$V = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m}, \quad (7.2)$$

unde  $A$ ,  $B$ ,  $n$  și  $m$  sînt constante pozitive.

Întrucît forța rezultantă de interacțiune derivă dintr-un potențial, expresia sa este de forma

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

astfel încît

$$F = -\frac{nA}{r^{n+1}} + \frac{mB}{r^{m+1}}. \quad (7.3)$$

Ecuațiile (7.2) și (7.3) sînt reprezentate grafic în figura 7.1. La echilibru, forța totală este zero, adică

$$\frac{nA}{r_0^{n+1}} = \frac{mB}{r_0^{m+1}} \Rightarrow r_0 = \left( \frac{mB}{nA} \right)^{\frac{1}{m-n}},$$

$r_0$  fiind distanța de echilibru dintre atomi.

Valoarea minimă a energiei  $V_0$  este chiar energia de legătură a sistemului și este egală cu căldura de disocierea moleculei. De notat că la metale atît legătura covalentă cît și cea metalică se stabilesc pe

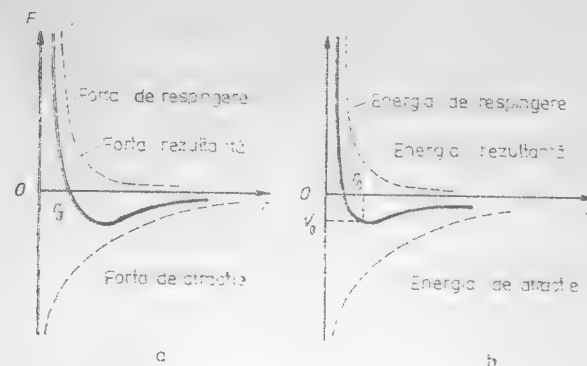


Fig. 7.1.

seama electronilor de valență. Deosebirea constă în aceea că în timp ce legătura covalentă se formează numai între perechi de atomi care-și pun în comun electronii de valență, electronii respectivi deplasându-se numai între cei doi atomi, la legătura metalică are loc o delocalizare a electronilor, în sensul că toți atomii cristalului își pun în comun electronii de valență.

Un câmp electric sau termic extern poate influența mult mișcarea electronilor de valență, ceea ce conferă metalului proprietatea de a fi bun conductor electric și termic.

Fiecare metal avînd o energie de legătură diferită, punctele de topire sînt caracteristice fiecăruia: mai mici la metalele alcaline și mai ridicate la metalele de tranziție. Metalelor le sînt atribuite, de asemenea, proprietăți optice, magnetice, galvanomagnetice etc. caracteristice.

### 7.3. Structura cristalină ideală a corpului solid

Una dintre condițiile formării stării solide este existența unei interacțiuni puternice între molecule (atomi sau ioni), astfel încît mișcarea termică a moleculelor nu joacă un rol atît de important ca în cazul lichidelor și în special al gazelor. Ca urmare, moleculele corpului solid se dispun una față de alta în poziții foarte precise, executînd doar mici oscilații termice în jurul pozițiilor lor de echilibru. Această dispunere determină condițiile de echilibru. Evident, dacă aceste condiții sînt îndeplinite într-o

zonă a substanței și au determinat dispunerea reciprocă a moleculelor din zona respectivă, aceleași condiții trebuie îndeplinite și în alte zone, prin umnare, trebuie să determine o dispunere analoagă a moleculelor în orice zonă a solidului respectiv. Aceasta înseamnă că la trecerea dintr-o parte în alta a solidului, modul de amplasare al moleculelor se repetă, adică structura corpurilor solide este periodică. Periodicitatea se realizează sub forma rețelilor cristaline, iar solidele însele sînt formate din cristale. Punctele de echilibru în care se află atomi, molecule sau ioni formează nodurile rețelei cristaline.

O astfel de argumentare nu explică însă existența stării amorfe la solide, cum sînt sticla, substanțele plastice și altele care nu au o structură periodică. Aceste substanțe nu se află în stare de echilibru, însă cu trecerea timpului ele își schimbă structura, apropiindu-se de starea cristalină. Sticla, de exemplu, cristalizează după cîteva sute de ani. Procesul de cristalizare poate fi accelerat considerabil prin încălzire, cînd sticla se înmoaie.

Istoric vorbind, studiul structurii cristaline a început aproximativ în jurul anului 1700, prin studierea de către metalurghi a formei externe sau morfologice a cristalelor.

După cum se va vedea în continuare, studiul aprofundat al structurii cristalelor s-a făcut cu ajutorul radiațiilor X, primul care a descoperit metoda fiind fizicianul german Max von Laue, în 1912, și dezvoltată de fizicienii englezi W. H. Bragg și W. L. Bragg. Experiența a arătat că orice cristal constă din atomi, molecule sau ioni, aranjați într-un model tridimensional, care se repetă regulat.

Cea mai mare parte a solidelor cristaline sînt formate prin aglomerarea unui număr mare de grăunți cristalini microscopici, orientați la întîmplare. Astfel de grăunți pot fi observați cu ajutorul unui microscop, dacă suprafața respectivă de metal, de exemplu cupru, se șlefuieste bine și apoi se corodează cu un acid. O asemenea aglomerare formează un policristal, starea policristalină fiind caracteristică tuturor metalelor care se obțin prin răcirea rapidă a topiturii.

Există totuși și situații în care unele substanțe naturale sînt formate din monocristale, care se recunosc după fețele plane pe care le prezintă. Întrucît asemenea monocristale naturale prezintă o serie de defecte, de exemplu incluziuni de atomi străini în cantități necunoscute și cu o distribuție

neuniformă, au fost imaginate cristale ideale, a căror periodicitate este respectată riguros după trei direcții necoplanare. Cu ajutorul cristalelor ideale, au putut fi studiate toate tipurile de cristale, atît cele existente în natură, cît și cele crescute artificial.

La baza descrierii structurii oricărui cristal se află o unitate de structură, numită celulă unitară sau elementară. Celula elementară este acea regiune din substanță, cu ajutorul căreia, prin translație pe cele trei direcții necoplanare, se poate construi rețeaua cristalină. Rezultă deci că rețeaua spațială a unui monocristal este de fapt un sistem de celule elementare paralele, tangente între ele și care ocupă întreg volumul monocristalului. Altfel spus, rețeaua spațială reprezintă un aranjament periodic regulat al unei mulțimi infinite de puncte discrete din spațiu, care se întind la infinit, prin translații repetate, după trei direcții necoplanare.

Rețeaua spațială este în fond o abstracție matematică, dar, plasînd în fiecare nod al rețelei un atom, moleculă sau ion, înseamnă că rețelei respective i s-a atribuit o bază, obținîndu-se structura cristalină (fig. 7.2.) Deci :

rețea + bază = structură cristalină.

Dacă luăm ca origine a coordonatelor un nod oarecare al rețelei, atunci raza vectorială a oricărui alt nod se poate pune sub forma

$$\vec{r} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}, \quad (7.4)$$

unde  $n_1, n_2, n_3$  sînt numere întregi (inclusiv zero). Vectorii  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  se numesc vectori fundamentali sau vectori de translație, iar valorile lor absolute coincid cu constantele rețelei pe direcțiile respective.

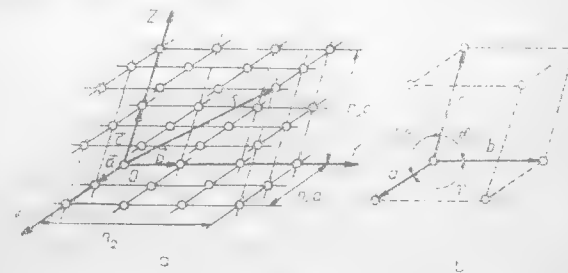


Fig. 7.2.

Având în vedere că vectorii fundamentali nu sînt în general ortogonali, în afară de aceștia, pentru descrierea celulei elementare se folosesc și unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  dintre vectorii respectivi. În funcție de valorile vectorilor fundamentali și de unghiurile dintre ei, există șapte clase de sisteme cristalografice (singonii), sistematizate în tabelul 7.1.

Tabelul 7.1

Sistemul cristalografic	Parametrii rețelei	Număr celule din sistem	Simbol celulă	Exemple
Triclinic	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	1	<i>P</i>	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
Monoclinic	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$	2	<i>P</i> <i>C</i>	$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
Ortorombic	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	4	<i>P</i> <i>C</i> <i>I</i> <i>F</i>	$\text{KNO}_3$
Tetragonal	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	2	<i>P</i> <i>I</i>	$\text{Sn}$ , $\text{TiO}_2$
Cubic	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	3	<i>P</i> <i>I</i> <i>F</i>	$\text{Au}$ , $\text{NaCl}$
Trigonal (romboedric)	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$ și $< 120^\circ$	1	<i>P</i>	$\text{SiO}_2$ , $\text{CaCO}_3$
Hexagonal	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ , $\gamma = 120^\circ$	1	<i>P</i>	$\text{Zn}$ , grafit

Dacă în formula (7.4) numerele  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  iau valorile tuturor numerelor independente și întregi cuprinse între  $-\infty$  și  $+\infty$ , raza vectorie respectivă  $\vec{r}$  va parcurge toate nodurile rețelei. Rețeaua formată printr-o transformare dată de formula (7.4), deci printr-o translație pe oricare dintre cele trei direcții, se numește rețea Bravais simplă. Acestui tip de rețea îi corespunde o celulă elementară primitivă, care are nodurile de rețea numai în colțuri. Luând

în considerație atomii ce revin unei celule, atunci celula ce aparține rețelei Bravais simplă conține doar un singur atom (moleculă sau ion). Acest lucru reiese din faptul că întrucît fiecare atom aflat în nodul celulei este de fapt comun la opt celule vecine, atomul contribuind cu o optime la celula considerată și deci celula conține  $8 \times 1/8$  atom = 1 atom. În total există patru tipuri de celule elementare: celule primitive (*P*) descrise mai sus, celule cu volum centrat (*I*) cu noduri de rețea și în centrul fiecărei celule elementare, celule cu fețe centrate (*F*) cu noduri de rețea și în centrul fiecărei fețe și celule cu baze centrate (*C*) cu noduri de rețea și în mijlocul celor două baze.

Pe baza considerațiilor de simetrie, Bravais a arătat că există în total 14 tipuri de rețele spațiale, care formează cele șapte sisteme cristalografice arătate mai sus (fig. 7.3).

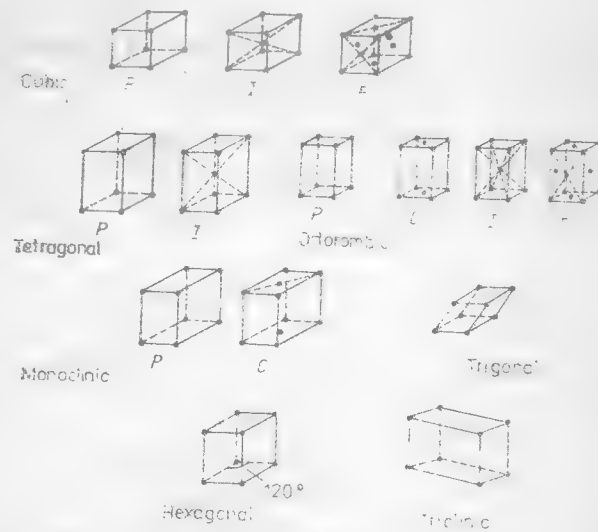


Fig. 7.3.

Repartizarea cristalelor în clase, pe baza aranjării periodice tridimensionale a atomilor, este doar unul dintre criteriile de clasificare și are la bază simetria de translație. În afară de acest tip de simetrie, rețeaua cristalină poate avea și o simetrie punctuală, prin care păstrînd fix un punct din rețea, prin diferite operații de simetrie (rotație, reflexie și combinații ale acestora), rețeaua coincide cu ea însăși.

Conform teoriei grupurilor, cu ajutorul căreia se studiază simetria punctuală, rezultă că toate cristalele pot fi împărțite în 32 clase cristaline, din care două aparțin sistemului triclinic, trei sistemului monoclinic, trei sistemului ortorombic, șapte sistemului tetragonal, cinci sistemului cubic, cinci sistemului trigonal și șapte sistemului hexagonal.

În încheiere, să vedem cum se pot scrie analitic elementele geometrice ale unui cristal, folosind așa-numita notație cristalografică. De fapt este vorba de o notație folosită pentru indicarea direcțiilor principale din cristal și a planelor cristaline.

Mai întâi, despre notația folosită la indicarea principalelor direcții dintr-un cristal. Fie, de exemplu, dreapta  $OP$  o direcție dintr-un cristal și fie  $a, b, c$  mărimile vectorilor fundamentali. Pentru a ajunge din originea  $O$  în punctul  $P$  urmînd cele trei axe de coordonate, trebuie parcurse următoarele distanțe:  $ha, kb, lc$ , unde  $h, k, l$  sînt cele mai mici numere întregi care descriu translația respectivă (fig. 7.4, a). În acest fel, direcția  $OP$  se notează

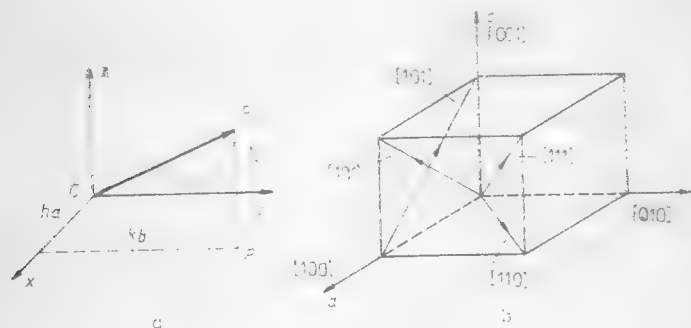


Fig. 7.4.

prescurtat  $(h, k, l)$ , aceștia numindu-se indicii Miller pentru direcția dată. Indicii  $h, k, l$  au valori pozitive, cînd deplasările se fac în sensul pozitiv al axelor de coordonate, și valori negative, cu sensul indicat deasupra, cînd deplasarea se face în sensurile negative ale axelor. În figura 7.4, b sînt indicate cîteva direcții principale dintr-un cristal.

Un plan cristalin este definit de un set de minimum trei puncte necoliniare din cristal. Pentru definirea unui asemenea plan se folosesc, de asemenea, indicii Miller  $[h, k, l]$ , care se calculează în modul următor. Fie, de exem-

plu, planul  $ABC$  care intersectează axele de coordonate, atașate celulei elementare, la distanțele  $x = 3a, y = 2b$  și  $z = 2c$  (fig. 7.5). Aducînd la același numitor valorile inverse ale numerelor 3, 2 și 2, se obține:  $\frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{3}{6}$ ,

iar indicii Miller căutați vor fi  $[2, 3, 3]$ . Cînd planul taie una dintre axe la infinit, indicii Miller corespunzător este zero.

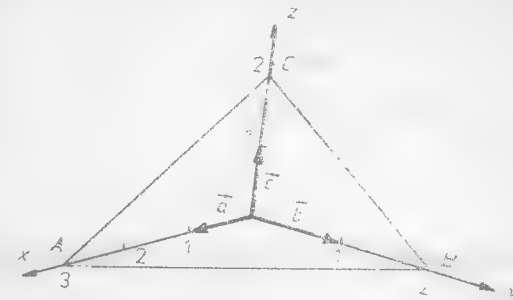


Fig. 7.5.

Cunoscînd parametrul rețelei cubice,  $a$ , de exemplu, și indicii Miller  $[h, k, l]$  corespunzători unei familii de plane reticulare, se poate determina distanța  $d$  dintre două plane vecine (fig. 7.6.) Dreapta  $d$ , perpendiculară pe familia de

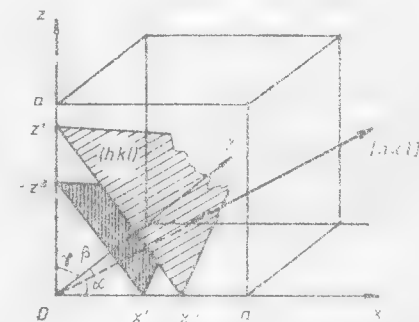


Fig. 7.6.

plane considerată, are și ea indicii Miller  $(h, k, l)$ . Cosinurile unghiurilor  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$ , formate de dreapta  $d$  cu axele

de coordonate sînt date de relațiile

$$\cos \alpha = \frac{d}{x'} = \frac{d}{\frac{a}{h}} = h \cdot \frac{d}{a}, \quad \cos \beta = \frac{d}{y'} = k \frac{d}{a},$$

$$\cos \gamma = \frac{d}{z'} = l \frac{d}{a}$$

și întrucît este valabilă relația

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

pentru rețeaua cubică rezultă

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}. \quad (7.5)$$

#### 7.4. Imperfecțiuni și defecte în rețeaua cristalină reală

Structura cristalină discutată mai sus, la care fiecărui nod al rețelei îi aparține aceeași bază, corespunde unui cristal ideal care reprezintă doar un model teoretic pentru studierea corpului solid. În realitate, în procesul de formare al cristalelor, ca urmare a condițiilor de solidificare, rețeaua cristalină va fi perturbată în organizarea ei, consecința fiind apariția unor imperfecțiuni și defecte în cristalele corespunzătoare. Scara de mărime a imperfecțiunilor și defectelor din rețeaua cristalină este diferită și în funcție de tipul defectului definește structura microscopică sau submicroscopică a unui material cristalin real, în opoziție cu un cristal ideal perfect.

În funcție de geometria lor, defectele se pot clasifica în: punctiforme, unidimensionale și de suprafață.

*Defectele punctiforme* sau zerodimensionale se referă la acele iregularități din structura cristalină care nu depășesc dimensiunile atomice și sînt observabile numai cu microscopul cu emisie în cîmp. Aceste defecte se manifestă la nivelul rețelei cristaline.

Fiecare atom dintr-un solid are o energie de vibrație și, la temperaturi mai mari de zero absolut, vor exista întotdeauna un număr finit de atomi care să aibă energii suficiente pentru a depăși bariera de potențial produsă de atomii vecini și să se deplaseze din poziția de echilibru.

În funcție de locul ocupat de atomul (molecula sau ionul) ce a părăsit nodul respectiv, pot exista două situații, corespunzîndu-le două defecte diferite. Cînd atomul ce părăsește nodul rețelei cristaline ajunge într-o poziție aflată între noduri (interstițiu), se creează un loc liber, numit vacanță, și un atom interstițial. Perechea vacanță-atom interstițial formează un defect Frenkel. Dacă atomul respectiv capătă o energie suficientă pentru a ajunge la suprafața metalului, se obține un defect Schottky. Cele două tipuri de defecte într-un cristal ionic au fost reprezentate în figura 7.7.

Se poate arăta că în cazul ambelor tipuri de defecte, concentrația de echilibru, adică raportul dintre numărul de vacanțe  $n$  și numărul de puncte de rețea  $N$  ale cristallului, crește exponențial cu temperatura. Să reamintim mai întîi că realizarea unei structuri cristaline ideale sta-

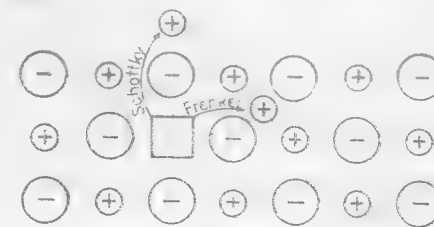


Fig. 7.7.

bile corespunde unui minim al energiei libere  $F = U - TS$ . Aceeași condiție se impune și pentru cristalele reale.

La zero absolut,  $\Delta F \equiv \Delta U$ , însă la temperaturi mai mari trebuie să se ia în considerație și variația entropiei și deci  $\Delta F = \Delta U - T \Delta S$ . Fie  $W_v$  energia necesară pentru realizarea unei vacanțe, ceea ce înseamnă că pentru producerea a  $n$  vacanțe, energia internă crește cu  $\Delta U = nW_v$ , iar energia cristallului real este

$$U = U_0 + nW_v,$$

unde  $U_0$  este energia cristallului ideal, fără defecte. În mod corespunzător crește și entropia  $S$  și energia liberă  $F$  a cristallului real. Entropia cristallului real va fi

$$S = S_0 + nS_v,$$

unde  $S_0$  este entropia cristallului ideal, iar  $S_v$  variația entropiei la realizarea unei vacanțe.



Având în vedere că numărul total de configurații posibile în care pot fi așezate cele  $n$  vacanțe în rețeaua cristalină este

$$w = \frac{N!}{n!(N-n)!},$$

ținând seama de formula lui Stirling pentru numere mari,  $\ln N! = N \cdot \ln N - N$  și de relația lui Boltzman,

$$S_v = k \ln w,$$

rezultă pentru energia liberă relația

$$F = U - TS = F_0 + nW_v - kT \ln \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Având în vedere că echilibrul termodinamic al sistemului se obține pentru o energie liberă minimă, din  $(\partial F / \partial n)_T = 0$  rezultă

$$\frac{n}{N} = \exp \left[ - \frac{W'}{kT} \right],$$

valabilă pentru defectele Schottky, în timp ce pentru defectele de tip Frenkel se obține

$$\frac{n}{N} = \exp \left[ - \frac{W''}{2kT} \right],$$

unde  $W'$  și  $W''$  sînt energiile necesare pentru realizarea unei vacanțe în cazul defectului Schottky, respectiv Frenkel.

Defecte punctiforme (de rețea) produc și prezența impurităților într-un cristal. Deși cele mai rafinate metode de preparare garantează o puritate absolută a materialelor, cele mai pure materiale conțin  $10^{-9}$  procente de impurități, ceea ce corespunde la o concentrație de aproximativ  $10^{17}$  atomi de impuritate la un metru cub de material. Pentru a ilustra acest grad de puritate, se dă ca exemplu situația în care 10 tone de grâu ar conține un bob de secară. Aceste impurități modifică proprietățile mecanice, termice, electrice, optice etc. ale cristalului respectiv.

Un metal avînd multe defecte punctiforme va prezenta o duritate mai mare, datorită faptului că distorsionările locale ale rețelei împiedică alunecarea planelor cristaline.

Vacanțele și atomii interstițiali au influență asupra coeficientului de dilatare termică a metalelor la călire, acesta prezentînd anomalii la dispariția vacanțelor de neechilibru.

S-a constatat experimental că, la metale, vacanțele și atomii în poziția interstițială sînt obstacole în calea deplasării electronilor sub influența unui cîmp electric aplicat. Din acest motiv, prin creșterea acestor defecte, rezistivitatea electrică a metalelor crește și ea și deci conductivitatea electrică scade. Alta este situația la conductorii ionici, de exemplu, la cristalele halogenurilor alcaline și de argint. S-a constatat că prin adăugarea de ioni bivalenți de Ca, Sr, Ba, Cd conductivitatea electrică (ionică) crește, datorită producerii de noi vacanțe de către ionii respectivi, motiv pentru care măsurarea conductivității electrice este una dintre metodele de investigare a defectelor de rețea.

O serie de cristale pure, cum sînt cele ale halogenurilor alcaline, sînt transparente în domeniul vizibil al spectrului, la temperatura obișnuită. Încălzind un astfel de cristal pînă la o anumită temperatură, în prezența vaporilor metalului alcalin, iar apoi răcit repede, cristalul se colorează. De exemplu, cristalele de KCl încălzite în vapori de potasiu devin roșii, în timp ce cristalele de NaCl încălzite în vapori de sodiu devin galbene. Aceleași defecte se obțin și prin introducerea unor impurități chimice în cristal sau prin bombardarea cu radiații X, radiații gamma sau cu neutroni.

Deoarece cristalele respective capătă o anumită culoare sub influența factorilor enunțați, înseamnă că o parte din radiațiile din spectrul vizibil sînt absorbite, fenomenul în sine fiind un defect punctiform, numit centru de culoare. Cel mai simplu este centrul de culoare  $F'$  (de la cuvîntul german Farbe = culoare), de care este responsabil cristalul și nu vaporii metalului alcalin folosit pentru producerea centrului de culoare.

Defectele optice sînt produse și de unele impurități chimice, cum sînt, de exemplu, impuritățile de Cr în monocristalul de  $Al_2O_3$ , determinînd colorația în roșu a rubinului.

Defectele unidimensionale se mai numesc și dislocații și apar fie prin inserția unui plan de atomi între planele ordonate ale cristalului (fig. 7.8, a), fie prin deplasarea unor plane cristalografice sub acțiunea unor eforturi tan-

gențiale (fig. 7.8, b). Dislocația propriu-zisă este linia dintre zona perturbată și cea neperturbată a cristalului.

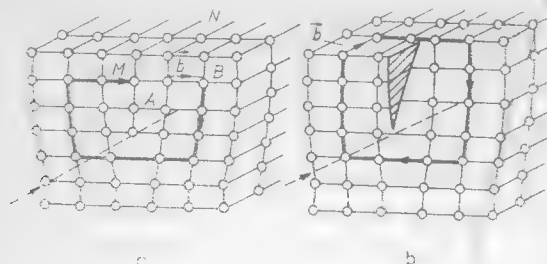


Fig. 7.8.

Corespunzător celor două moduri de obținere a dislocațiilor unidimensionale, acestea pot fi: marginale sau elicoidale. Dislocațiile pot fi descrise de bucla care înconjoară linia de dislocație.

Fie, de exemplu, un plan de inserție  $MN$ , introdus între două plane reticulare vecine (fig. 7.8, a). Se observă că, în acest caz, plecând din nodul  $M$  și parcurgând pe direcțiile  $OX$  și  $OY$  în sens direct și în sens invers, același număr de noduri, se obține bucla sau circuitul Burgers. În cazul existenței dislocației, bucla nu se închide iar vectorul  $\overline{AB} = \vec{b}$  se numește vectorul Burgers. Vectorul Burgers este perpendicular pe bucla de dislocație în cazul dislocației marginale (fig. 7.8, a) și este paralel cu ea în cazul dislocației elicoidale (fig. 7.8 b).

Liniile de dislocație, în cazul în care nu formează bucle închise, au capetele ieșite la suprafața cristalului, putând fi puse în evidență prin metoda corodării chimice. În acest sens epruveta de metal se șlefuieste foarte bine, după care se atacă cu un reactiv chimic adecvat. Privită la microscop, se observă în porțiunile în care apar capetele liniilor de dislocație, gropi de corodare, care pot fi apoi numărate, cunoscând astfel numărul de dislocații din unitatea de suprafață.

Dislocațiile nefiind sisteme stabile, este necesară consumarea unui lucru mecanic pentru crearea lor. Din acest motiv, un metal care prezintă dislocații este ușor de deformat plastic și, din contră, lipsa dislocațiilor mărește limita de rezistență și proprietățile elastice. Dislocațiile joacă deci un rol important în explicarea proprietăților

mecanice ale solidelor, permițând, de exemplu, înțelegerea mecanismului deformărilor plastice și, de aici, necesitatea elaborării de tehnologii pentru obținerea materialelor cu parametri doriti.

Defectele de suprafață sau bidimensionale sînt defecte structurale, care apar la suprafața de separare a două părți cu structuri diferite dintr-un cristal, între două cristale sau între faze diferite. Aceste defecte apar și la trecerea de la un agregat cristalin (grăunte, cristaliță) la altul, cu orientări cristaline diferite. Defectele pot apărea sub forma unui strat de tranziție, în care atomii ocupă poziții intermediere între pozițiile atomilor celor două cristale vecine sau sub forma unui strat amorf, care nu are orientare cristalografică. În general, prin laminare la rece, într-un metal se formează un număr mare de grăunți; prin recoacere la temperatură adecvată are loc o grupare ordonată a dislocațiilor, conducînd la o îmbunătățire a calității materialului respectiv.

## 7.5. Starea electronilor liberi în solide

După ce s-au imaginat diferite tipuri de cristale din care sînt făcute majoritatea solidelor, deci și metalele, s-a încercat găsirea unor astfel de modele legate de structura cristalină, care să explice proprietățile fizice ale corpului solid. Primele modele aparțin fizicii clasice, bazîndu-se pe rezultatele mecanicii și termodinamicii. Cu aceste modele au putut fi explicate un număr mic de proprietăți ale solidului. Folosirea unor modele care se bazează pe concepțiile fizicii cuantice a permis explicarea în plus a unor proprietăți legate de structura internă a solidelor.

### 7.5.1 Modelul electronilor liberi

În acest paragraf și în următorul, vom înțelege prin solid o stare cristalizată a substanței formată din nuclee, care ocupă nodurile rețelilor cristaline, și din electroni, care se mișcă liber prin solid. Avînd în vedere că cea mai mare parte a electronilor unui atom sînt puternic legați de nucleu, rezultă că se pot mișca liber, de fapt, numai electronii de valență ai atomilor ce compun solidul respectiv, electronii formînd așa-numitul gaz electronic.

Interpretarea proprietăților fizice cu ajutorul modelului electronilor liberi a fost dezvoltată mai întâi clasic, pe baza lucrărilor lui Drude și apoi ale lui Lorentz.

În concepția clasică, gazul electronic are următoarele proprietăți: este un gaz perfect, cărui i se poate aplica distribuția după viteze a lui Maxwell; electronii se mișcă haotic în lipsa unui câmp electric extern; sînt luate în considerare numai interacțiunile dintre electroni și ioni, întrucît interacțiunile reciproce dintre electroni sînt neglijabile.

La vremea sa, teoriile lui Drude și, respectiv, Lorentz au fost de un real folos la determinarea aproximativă a conductivității termice și a conductivității electrice la temperatura camerei. Imposibilitatea însă de a explica valorile conductivității termice, respectiv conductivității electrice în apropierea temperaturii de zero absolut și chiar a valorilor exacte ale conductivității termice la temperatura camerei precum și a unor fenomene ca paramagnetismul metalelor, căldura masică electronică etc., a determinat aplicarea aparatului matematic al mecanicii cuantice pentru descrierea comportării electronilor liberi din metale.

Modelul cuantic al electronilor liberi a fost dezvoltat de Sommerfeld. Conform acestui model, energia potențială a electronilor are o valoare constantă și negativă în interiorul metalului și nulă în exteriorul său. Vom considera deci metalul ca o groapă de potențial — pentru simplificare, unidimensională — de lățime  $L$ , adîncime  $V = -V_0$  și conținînd  $N$  electroni (fig. 7.9).

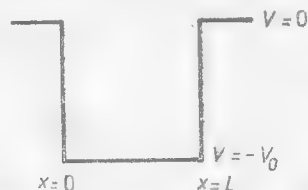


Fig. 7.9.

Se pune problema găsirii stărilor permise pentru un electron aflat în groapa de potențial. Aceste stări pot fi găsite luînd în considerare faptul că cei  $N$  electroni nu sînt complet independenți unul față de altul, tocmai datorită acțiunii principiului de exclusiune al lui Pauli, conform căruia, fiecare stare poate fi ocupată de cel mult doi electroni, avînd spinii opuși.

Stările cuantice permise ale unui electron aflat în groapa de potențial se află rezolvînd ecuația lui Schrodinger, cu condițiile la limită adecvate,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + (W - V) \psi = 0 \quad (7.6)$$

Condițiile la limită sînt:  $\psi = 0$ , pentru  $x = 0$  și pentru  $x = L$  (condițiile sînt aceleași și pentru direcțiile  $y$  și  $z$ ).

În acest fel, electronul poate fi considerat ca o undă, caracterizată de funcția de undă  $\psi(x, y, z)$  și de numărul de undă  $K = 2\pi/\lambda$ , unde  $\lambda$  este lungimea de undă. În continuare, vom scrie ecuația lui Schrodinger explicitînd energia cinetică,

$$W_c = W - V = W - (-V_0) = W + V_0, \quad (7.7)$$

în funcție de numărul de undă. În acest scop, conform formulei lui de Broglie, vom avea

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar/2\pi}{\lambda/2\pi} = \hbar K, \quad (7.8)$$

iar energia cinetică

$$W_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \quad (7.9)$$

și deci

$$W + V_0 = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}, \quad (7.10)$$

iar ecuația lui Schrodinger se scrie

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \psi = 0.$$

Funcția de undă ce satisface această ecuație este de forma

$$\psi = \psi_0 e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}}$$

sau, pentru cazul unidimensional,

$$\psi = \psi_0 e^{iKx} = \psi_0 (\cos Kx + i \sin Kx).$$

Introducînd acum condițiile la limită, rezultă că pentru  $x = 0$ , avem  $\psi(0) = 0$ , iar din  $x = L$  rezultă  $\psi(L) = 2\psi_0 \sin KL = 0$  și deci  $KL = l\pi$ , de unde

$$K = \frac{l\pi}{L},$$

$l$  fiind un număr întreg și pozitiv ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ). Nu putem avea  $l = 0$ , deoarece dacă peste tot  $\psi = 0$ , înseamnă de fapt că electronul nu există.

În același timp, energia cinetică se scrie

$$W_c = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot l^2.$$

Avînd în vedere condiția de normare

$$\int_0^L \psi \psi^* dx = 1,$$

unde  $\psi = \psi_0 \sin \frac{l\pi x}{L}$ , rezultă

$$\psi_0^2 \int_0^L \sin^2 \frac{l\pi x}{L} dx = 1,$$

de unde

$$\psi = \left( \frac{2}{L} \right)^{1/2} \sin \frac{l\pi x}{L}.$$

Dacă se rezolvă ecuația lui Schrödinger în cazul unei cutii tridimensionale cubice, cu latura  $L$ , se obține soluția

$$\psi = \psi_0 e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} = \left( \frac{2}{V} \right)^{1/2} \cdot \sin \frac{l\pi x}{L} \cdot \sin \frac{m\pi y}{L} \cdot \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad (7.11)$$

unde  $V$  este volumul cubului. Notînd

$$K_x = \frac{l\pi}{L}; \quad K_y = \frac{m\pi}{L}; \quad K_z = \frac{n\pi}{L},$$

rezultă

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 (l^2 + m^2 + n^2),$$

iar pentru energie se obține

$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 (l^2 + m^2 + n^2). \quad (7.12)$$

Se observă că datorită simetriei cubice a cutiei, există degenerescență, energia nemaifiind definită de numerele cuantice  $n, l, m$ , ci doar de

$$p^2 = n^2 + l^2 + m^2,$$

unde  $(l, m, n)$  reprezintă un grup de numere cuantice, la care, dacă se adaugă numărul cuantic de spin  $m_s$ , se obține grupul de numere cuantice  $(n, l, m, m_s)$  ce caracterizează starea electronului aflat pe un nivel energetic.

Energia corespunzătoare saltului electronului între două nivele succesive fiind dată de relația

$$W_{p+1}[(p+1)^2] - W_p(p^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left( \frac{\pi}{L} \right)^2,$$

rezultă că pentru un cristal avînd volumul de  $10^{-6} \text{ m}^3$ , această energie este de aproximativ  $10^{-15} \text{ eV}$ , considerînd două nivele de la fundul gropii de potențial.

Informații despre numărul de stări sau energia  $W$  pentru un număr de undă  $K$  dat, se pot obține astfel. Considerăm spațiul tridimensional  $\vec{K}$  în care coordonatele axelor sînt  $K_x, K_y$  și  $K_z$  (fig. 7.10, a). Un punct din acest spațiu poate fi reprezentat, conform relației (7.8), prin componentele momentului impulsului divizate prin termenul  $\hbar$ .

Să calculăm numărul de stări care au vectorul de undă cuprins între valorile  $\vec{K}$  și  $\vec{K} + d\vec{K}$ . În spațiul coordonatelor respective, starea cea mai de jos poate fi reprezentată prin figura geometrică spațială ce are dimensiunile

$$K_x = 1 \frac{\pi}{L}, \quad K_y = 1 \frac{\pi}{L}, \quad K_z = 1 \frac{\pi}{L},$$

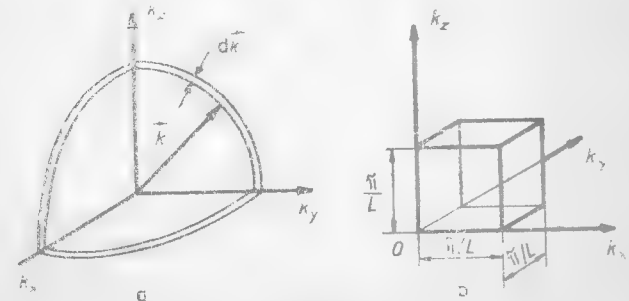


Fig. 7.10.

deci de un cub care ocupă volumul  $(\pi/L)^3$  în spațiul  $\vec{K}$  (fig. 7.10, b). Împărțind volumul păturii sferice cuprinse între vectorii  $\vec{K}$  și  $\vec{K} + d\vec{K}$  la volumul corespunzător unei stări, rezultă numărul de stări avind numărul de undă cuprins între  $K$  și  $K + dK$ ,

$$dN(K) = \frac{1}{8} \frac{4\pi K^2 dK}{(\pi/L)^3} = \frac{VK^2 dK}{2\pi^2}, \quad (7.13)$$

unde  $V$  este volumul cristalului. Termenul  $1/8$  apare deoarece am considerat toate stările corespunzătoare variației vectorului de undă cu  $d\vec{K}$  pentru toate direcțiile, pozitive și negative ale axelor de coordonate.

Numărul total de stări care se află deasupra unui nivel cu numărul de undă  $K$  este

$$N(K) = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^K K^2 dK = \frac{VK^3}{6\pi^2}. \quad (7.14)$$

Acest număr trebuie multiplicat cu 2, pentru a ține seama de spin, conform principiului de excluziune a lui Pauli.

Folosind ecuația (7.10), putem exprima ușor ecuațiile (7.13) și (7.14) în funcție de energia cinetică. Pentru aceasta să observăm, folosind ecuația (7.13), că numărul de stări pe unitatea de număr de undă și unitatea de volum a cristalului se scrie

$$\frac{dN(K)}{VdK} = \frac{dn}{dK} = \frac{K^2}{2\pi^2}, \text{ unde } n = \frac{N(K)}{V}.$$

În mod asemănător, folosind (7.10), se observă că numărul de stări raportat la o unitate de interval de energie și la unitatea de volum a cristalului, se scrie

$$\begin{aligned} \frac{dN(K)}{dW dV} &= \frac{dn}{dW} = \frac{dn}{dK} \cdot \frac{dK}{dW} = \frac{K^2}{2\pi^2} \cdot \frac{m}{\hbar^2 K} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} (W + V_0)^{1/2}. \end{aligned}$$

Am obținut în acest fel un rezultat foarte important, anume că densitatea de stări (pe unitatea de interval de energie) este proporțională cu  $(W + V_0)^{1/2}$ .

Dacă un corp solid aflat la  $T = 0 \text{ K}$  conține  $N$  electroni, atunci numărul maxim de nivele ocupate va fi  $N/2$  și stărilor cele mai de jos posibile le corespunde un nivel cu energia cinetică  $W_F^0$ , dată de

$$\frac{N}{2} = \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{W_F^0} (W + V_0)^{1/2} dW,$$

de unde

$$W_F^0 = 4\pi^2 \left( \frac{\hbar^2}{8m} \right) \cdot \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} n_e^{2/3}, \quad (7.15)$$

unde  $n_e$  este densitatea electronilor.

Nivelul cu energia  $W_F^0$  are o semnificație specială și se numește nivel Fermi. El reprezintă energia maximă a electronilor la temperatura  $T = 0 \text{ K}$ . Mai jos de acest nivel, toate stările sînt ocupate, fiecare de către doi electroni diferiți prin spini, iar mai sus, toate stările sînt libere (fig. 7.11). Nivelul Fermi, aflîndu-se în interiorul gropii de potențial care reprezintă solidul metal, înseamnă că pentru a extrage electronii de pe nivelul Fermi și



Fig. 7.11.

a-i aduce la suprafața sa este necesară energia  $W_e$  — numită și lucru de extracție. Se observă că adîncimea gropii de potențial este

$$W_s = W_F + W_e.$$

Starea energetică a sistemului de electroni la  $T = 0 \text{ K}$  poartă numele de stare Fermi sau starea fundamentală. Suprafața de discontinuitate, de energie constantă, care desparte regiunea din spațiul vectorului de undă cu nivele energetice ocupate de cele neocupate, se numește suprafață Fermi.

Din relația (7.15) se observă că energia Fermi  $W_F$  crește cu concentrația electronilor  $n_e$ . Acest lucru se explică astfel: electronii adăugați solidului care conține  $N$

electroni, dispuși pe stările cele mai jos posibile, vor ocupa obligatoriu nivele energetice mai înalte, ceea ce face să crească valoarea  $W_F$ .

Se poate defini chiar o temperatură Fermi folosind relația clasică

$$T_F = \frac{W_F^0}{k_B},$$

unde  $k_B$  este constanta lui Boltzmann. De exemplu, pentru Na rezultă  $W_F^0 = 3,12$  eV și  $T_F = 37\,000$  K. Această temperatură efectivă, extrem de mare, nu poate fi folosită pentru obținerea energiei termice, deoarece rețeaua de ioni din care este format metalul nu se încălzește suficient. Realitatea este că rețeaua de ioni poate doar schimba energie cu electronii, care, prin excitație trec pe nivele superioare de energie. Singura energie disponibilă este aceea a rețelei însăși care la temperatura camerei este de aproximativ 0,025 eV pe ion. De fapt vor schimba energie cu rețeaua de ioni numai o parte dintre electronii din metal și anume cei aflați pe nivelul cel mai de sus și după acest schimb vor trece pe nivele inferioare din groapa de potențial. În mod asemănător, se argumentează faptul că la căldura specifică a solidelor contribuie un număr mic de electroni. Această idee este în contradicție cu teoria cinetică clasică, în care se presupune că toți electronii din solid contribuie la energia termică egală cu  $(3/2) kT$ . Desigur că rezultatele clasice nu sînt în acord cu rezultatele fizicii cuantice.

Dacă solidul se află la o temperatură  $T > 0$ , în urma mișcării termice unii dintre electroni pot trece pe nivele superioare nivelului Fermi, lăsînd libere stări aflate sub nivelul Fermi. Studiul distribuției de echilibru a electronilor aflați la o temperatură  $T > 0$  se face cu ajutorul funcției de distribuție Fermi-Dirac, care exprimă probabilitatea ca o stare cuantică cu energie  $W$  să fie ocupată la temperatura  $T$ :

$$f(W) = \frac{1}{1 + \exp (W - W_F)/kT)}. \quad (7.16)$$

Este clar că la  $T = 0$  K probabilitatea ca o stare cu nivel energetic  $W_F$  să fie ocupată de electroni este constantă, egală cu unitatea sub nivelul Fermi  $W_F$  și nulă deasupra acestui nivel. Comportarea funcției de distribuție Fermi-

Dirac la 0 K și la  $T \neq 0$  K ( $T_2 > T_1 > T$ ) este arătată în figura 7.12. Se observă că indiferent de temperatura solidului, pentru  $W = W_F$ , funcția de distribuție este egală cu 1/2. Rezultă de aici că putem defini nivelul Fermi ca fiind acel nivel pentru care probabilitatea de ocupare este 1/2. În mod asemănător se definește energia Fermi.

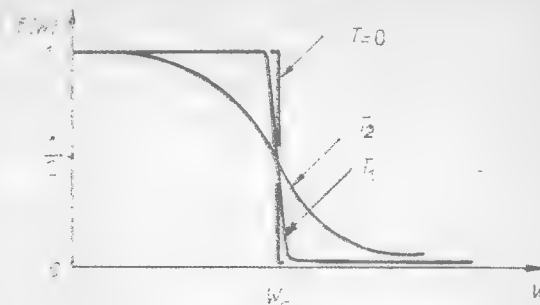


Fig. 7.12.

Dacă avem în vedere că pe fiecare nivel energetic, conform principiului lui Pauli, pot exista maximum doi electroni cu spinii antiparaleli, numărul electronilor pe nivelul cu energia  $W$  este dat de relația

$$n_i = \frac{2}{1 + \exp (W - W_F)/kT)}. \quad (7.17)$$

### 7.5.2. Modelul benzilor de energie

Cu ajutorul modelului electronilor liberi, descris mai sus, este posibilă explicarea satisfăcătoare a un or comportări caracteristice metalelor.

Folosind acest model, s-a dedus legea lui Ohm precum și legea lui Wiedemann-Franz cu privire la raportul dintre conductivitatea electrică și cea termică. Același model nu explică însă împărțirea solidelor în buni conducători electrici, cum sînt metalele, în izolatori ca de exemplu sulful și în semiconductori cum sînt germaniul și siliciul și nici deosebirea în ce privește valorile rezistivității precum și variația sa cu temperatura. Din aceste motive s-au căutat și alte modele care să explice faptele experimentale.

Unul dintre modelele, care s-a impus, explicînd upele proprietăți ale solidelor și în special al semiconducto-



rilor, pe seama structurii lor interne este modelul benzilor de energie. La acest model se poate ajunge în mai multe moduri, din care vom indica două, în cele ce urmează.

Se poate ajunge la modelul benzilor de energie plecând de la așa-numitul model al electronilor cvasiliberi. Conform acestui model, ionii sodiului fiind situați în nodurile rețelei cristaline, sînt considerați practic imobili sau, în orice caz, au o mișcare foarte lentă față de cea a electronilor (aproximația adiabatică). În același timp, se neglijează orice alte interacțiuni în afara celor electrostatice și deci, electronii de valență se mișcă de fapt în câmpul periodic al cristalului, format printr-o aranjare regulată a ionilor.

Pentru a pune în evidență efectul rețelei asupra mișcării electronului, vom considera că funcția de undă care îl caracterizează,  $\psi(x)$ , trebuie să respecte simetria cristalului, adică  $\psi(x) = \psi(x + a)$ , unde  $a$  este constanta rețelei cristaline și  $|\psi(x)|^2 = |\psi(x + a)|^2$ , deci probabilitățile de găsim a electronului în stările  $x$  și  $x + a$  sînt identice. Toate acestea arată de fapt că funcția de undă în cazul electronilor cvasiliberi, numită și funcția lui Bloch, are o amplitudine care depinde de periodicitatea rețelei,

$$\psi(\vec{r}) = u(\vec{r}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}}, \quad (7.18)$$

unde  $u(\vec{r})$  este amplitudinea care se repetă de la o celulă a rețelei la alta.

În cazul în care ionii rețelei sînt suficient de îndepărtați, încît între ei să nu se manifeste interacțiunea electrostatică, amplitudinea  $u(\vec{r})$  a funcției de undă a electronului cvasiliber, tinde asimptotic la  $\psi_0$  — amplitudinea funcției de undă asociată electronului liber. În acest caz, neglîndu-se seama de energia potențială de interacțiune dintre electronii liberi și ionii din nodurile rețelei, energia unui electron va fi, conform relației (7.10),

$$W = \frac{\hbar^2 K^2}{2m},$$

deci o funcție continuă de numărul de undă  $K$ . În figura 7.13 este redată reprezentarea grafică a funcției  $W = f(K)$ , care, după cum se vede, are forma unei parabole.

Problema care interesează este de a stabili distribuția energiei electronilor cvasiliberi din cristal. În acest scop

vom folosi, fără a reduce din generalitate, modelul simplu de rețea cristalină, unidimensională — numit și modelul Kronig-Penney. Conform acestui model, electronii de valență, satisfăcînd toți ionii aflați în nodurile rețelei cristaline, se deplasează printr-o succesiune infinită de

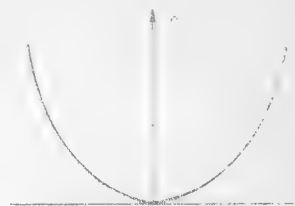


Fig. 7.13.

gropi de potențial avînd adîncimea  $V_0$ , cu ipoteza simplificatoare că potențialul este foarte mare în punctele în care se află ionii, în comparație cu restul punctelor din cristal.

Fie o succesiune de gropi de potențial de lățime  $a$  și avînd forma din figura 7.14. Ionii sînt situați în punc-

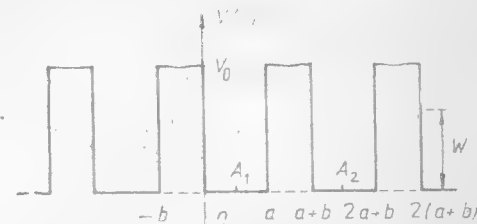


Fig. 7.14.

te  $A_1, A_2, \dots$  și sînt separați prin bariere de potențial de înălțime  $V_0$  și lățime  $b$ , astfel că  $a+b$  va fi chiar constanta rețelei cristaline.

Starea unui electron cu energia  $W < V_0$  și care străbate grupa de potențial prin efect tunel este descrisă de ecuația Schrödinger,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [W - V(x)]\psi = 0.$$

Pentru regiunea în care potențialul este nul ( $0 < x < a$ ), soluția ecuației se scrie

$$\psi_1(x) = A e^{ixr} + B e^{-ixr},$$

în timp ce în regiunea maximelor de potențial ( $a < x < a+q$ )

$$\psi_2(x) = C e^{\beta x} + D e^{-\beta x},$$

unde

$$\alpha = [2m W/\hbar^2]^{1/2} \text{ și } \beta = [(V_0 - W)/\hbar^2]^{1/2}. \quad (7.19)$$

Vom trece peste o serie de calcule matematice intermediare neesențiale, considerând că  $\psi_1(x)$  și  $\psi_2(x)$  sînt funcții de tip Bloch (7.18). În continuare se pot determina coeficienții  $A, B, C, D$  impunînd ca funcția  $u$  și derivata sa  $du/dx$  să satisfacă condițiile de continuitate și periodicitate a regiunilor considerate. Cum însă condiția de periodicitate impune ca ecuația lui Schrödinger să rămînă invariantă față de transformarea  $x \rightarrow x + a$ , înseamnă că  $\psi(x + a)$  poate să difere de  $\psi(x)$  dar printr-un factor constant, adică  $\psi(x) = e^{i\varphi} \cdot \psi(x + a)$ .

În acest fel, se obține un sistem de patru ecuații omogene și din condiția ca sistemul să aibă soluții nebanale, rezultă o relație de forma

$$\frac{\beta^2 ab}{2\alpha a} \sin \alpha a + \cos \alpha a = \cos ka$$

sau, făcîndu-se substituția

$$P = \lim_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ b \rightarrow 0}} \frac{\beta^2 ab}{2},$$

rezultă

$$P \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a = \cos Ka, \quad (7.20)$$

unde  $P$  este penetrabilitatea (transparența) barierei de potențial.

S-a obținut în felul acesta o ecuație care leagă energia  $W$  conținută în termenul  $\alpha$  și numărul de undă, expresia (7.20) fiind în același timp o soluție generală a ecuației lui Schrödinger pentru punctele  $0, a, a+b$ . De observat că, întrucît  $-1 \leq \cos ka \leq +1$ , rezultă că și

$$-1 \leq P \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a \leq +1,$$

ceea ce arată de fapt că electronii cvasilibri din cristal nu pot avea orice fel de energie. Cu alte cuvinte, spectrul

energetic al electronilor cvasilibri prezintă porțiuni permise, separate de altele interzise ale energiei.

Zonele permise sînt caracterizate de faptul că transparența barierei de potențial este totală,  $P \rightarrow 0$  și din (7.20) rezultă  $\alpha = K$ , unde  $-\frac{\pi}{a} < K < +\frac{\pi}{a}$ . Avînd în vedere relația (7.19), rezultă

$$W_k = \frac{\hbar^2}{2m} K^2. \quad (7.21)$$

Aceasta este expresia energiei permise electronului liber, în funcție de numărul de undă. Zonele interzise ale energiei electronului sînt caracterizate de faptul că transparența barierei de potențial este nulă, deci  $P \rightarrow \infty$ , și electronul are doar o mișcare în jurul ionului său, ca și cum s-ar mișca într-o cutie. Valorile lui  $\alpha$  care satisfac ecuația (7.20) pot fi numai acelea pentru care  $\sin \alpha a = 0$ , în afară de  $\alpha = 0$ . Din această condiție rezultă

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} = 0 \text{ sau } \lim_{\substack{P \rightarrow \infty \\ \alpha \rightarrow 0}} P \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \rightarrow \infty.$$

Or, acest lucru înseamnă că  $\sin \alpha a = 0$  și deci  $\alpha a = n\pi$ , unde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , de unde se obține

$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \cdot n^2.$$

În acest al doilea caz, electronul apare izolat, iar din  $|\cos ka| = 1$  rezultă că stările nepermise apar atunci cînd numărul de undă  $K$  va lua valorile

$$K = \pm n \frac{\pi}{a}; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

În figura 7.15 este reprezentată variația funcției,

$$F(\alpha, a) = P \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a,$$

în funcție de  $\alpha a$ . Se observă că energiile electronului sînt grupate în benzi permise  $\Delta W_1, \Delta W_2, \Delta W_3, \dots$  (hașurate în desen) și benzi interzise de energie. Se constată că o dată cu creșterea energiei (conținută în termenul  $\alpha$ ), lățimea

benzilor permise se mărește, în timp ce a benzilor interzise scade. În interiorul fiecărei benzi permise energia variază continuu în funcție de numărul de undă  $K$ .

Pentru punerea în evidență a benzilor de energie, se poate reprezenta energia  $W$  a electronilor dată de relația

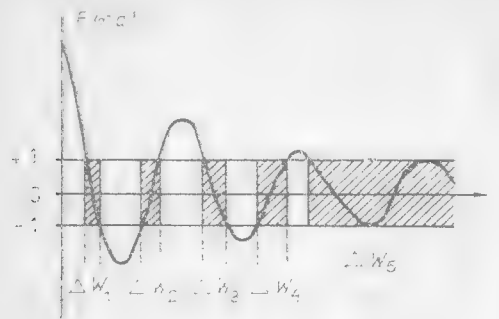


Fig. 7.15.

(7.21) în funcție de numărul de undă  $K$ . Pentru aceiași să observăm că o bandă permisă de energie s-a obținut pentru zona în care  $-\frac{\pi}{a} < K < +\frac{\pi}{a}$ , și o bandă nepermisă în zona  $K = \pm\pi/a$ . În figura 7.16 este arătată, prin

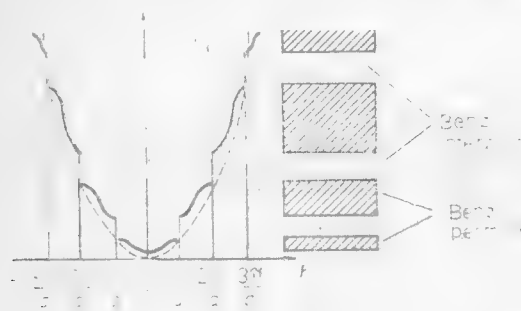


Fig. 7.16.

curba plină, dependența  $W = f(K)$  pentru electronii cvasilibri, în comparație cu aceeași dependență, pentru electronii liberi (curba punctată), iar în dreapta figurii este redat modul de dispunere a benzilor de energie.

La modelul benzilor de energie se poate ajunge urmărind procesul de formare a unei structuri cristaline simple,

unidimensionale pornind de la considerentul că un cristal este format prin apropierea unui de alții a atomilor ce formează un colectiv de atomi izolați. În cazul atomilor izolați, când distanța  $r$  dintre atomi este mult mai mare decât constanta rețelei cristaline ( $r \gg a$ ), electronii își păstrează stările lor energetice din atom și se dispun pe nivelele de energie  $1s, 2s, 2p$  etc., cu respectarea principiului lui Pauli. În figura 7.17 s-a reprezentat schematic dispunerea electronilor pe nivelele de energie corespunzătoare

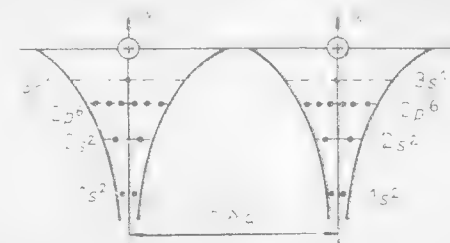


Fig. 7.17.

toare pentru doi atomi de Na aflați la distanța  $r \gg a$ . Nivelele energetice fiind identice pentru un grup format, de exemplu, din  $N$  atomi, spunem că vor fi de  $N$  ori degenerate. În interiorul cristalului însă, atomii sînt suficient de apropiați între ei și pentru  $r \approx a$ , mișcarea electronilor unui atom este perturbată de prezența celorlalți atomi. Acest lucru conduce la modificarea nivelelor de energie și la micșorarea înălțimii barierelor de potențial pe care trebuie să le învingă electronii pentru a trece de la un atom la altul. În figura 7.18 este arătată schema nivelelor

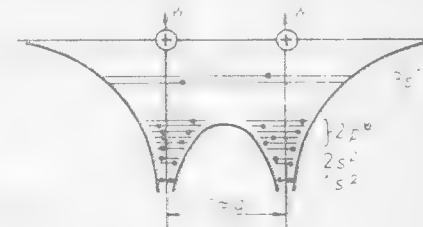


Fig. 7.18.

energetice pentru cazul cînd cei doi atomi de Na se află la o distanță unul de altul, comparabilă cu constanta re-

țelei cristaline. Se observă că înălțimea barierei de potențial a scăzut mult pentru electronii  $1s$ ,  $2s$  și  $2p$ , în timp ce pentru electronul  $3s$  această barieră a dispărut și cei 2 electroni  $3s$  ai celor doi atomi au devenit practic liberi. În plus, celor două nivele  $3s$  nedegenerate ale atomului liber, le corespunde o bandă de energie  $3s$ , formată din două subnivele.

Prin generalizare, în cazul unui cristal real format din  $N$  atomi identici, aflați în nodurile rețelei, fiecare nivel energetic atomic discret se despică în  $N$  subnivele, care se grupează în benzi energetice permise, între care se află benzi interzise (fig. 7.19). Se observă că nivelele electro-

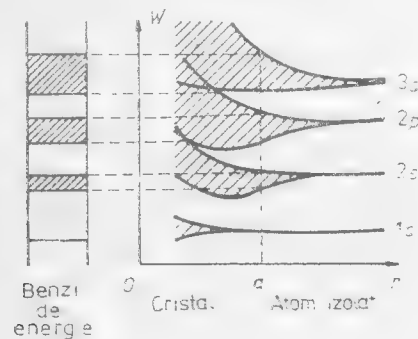


Fig. 7.19.

nice periferice sînt mai perturbate decît cele profunde și că pe măsură ce distanța dintre ioni scade, benzile de energie încep să se suprapună.

Fiecare bandă de energie conține un număr limitat de nivele energetice și la  $0\text{ K}$ , nivelul de cea mai joasă energie, conform principiului de exclusiune a lui Pauli, poate fi ocupat de maxim doi electroni cu spinii opuși. Restul electronilor se dispun, cîte doi, pe nivelele energetice superioare, în cadrul benzii permise respective, astfel că la  $0\text{ K}$ , ultimul nivel energetic care ar putea fi ocupat de electroni este nivelul Fermi căruia îi corespunde, așa cum s-a arătat mai înainte, energia Fermi.

Repartiția electronilor pe nivelele energetice are loc ținîndu-se seama de statistica Fermi-Dirac, astfel încît numărul electronilor pe nivelul cu energia  $W$  este dat de relația (7.17). Ultima bandă ocupată complet sau parțial cu electroni la  $0\text{ K}$  s-a numit bandă de valență (BV), în timp ce prima bandă complet liberă de electroni la  $0\text{ K}$

s-a numit bandă de conducție (BC). Electronii din benzile permise aflate sub banda de valență sînt electroni puternic legați de atomi, motiv pentru care este necesară o energie foarte mare pentru a fi smulși din atomi.

Conform modului de ocupare a benzilor de către electroni, toate solidele pot fi clasificate în două mari grupe.

O primă grupă de solide o formează metalele, care, deasupra ultimei benzi ocupate, urmează o bandă parțial ocupată de electroni care formează banda de valență. La asemenea corpuri, nivelul Fermi trecînd prin banda de valență, în afară de nivelele ocupate de electroni aflate sub nivelul Fermi, vor exista și nivele energetice neocupate de electroni, deasupra nivelului Fermi (fig. 7.20, a). O astfel de dispunere a nivelelor energetice se realizează la

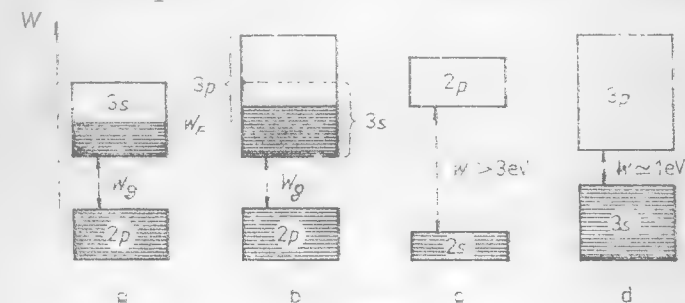


Fig. 7.20.

toate elementele ce formează metalele alcaline. De exemplu, banda de valență a cristalului de Na formată din nivelele  $3s$  ale atomilor este numai pe jumătate ocupată de electroni. O bandă parțial ocupată se poate realiza și ca urmare a suprapunerii parțiale a unei benzi ocupate sau parțial ocupate cu o bandă liberă, neocupată, cum se întîmplă în cazul beriliului sau la metalele alcalino-pămîntoase (fig. 7.20, b). În ambele cazuri, un cîmp electric de valori obișnuite sau o temperatură mai mare de  $0\text{ K}$  poate să treacă electronii pe stări electronice mai înalte, de exemplu, în banda de conducție, electronii respectivi contribuind la conducția curentului electric și a energiei termice. Solidele care prezintă o bandă parțial ocupată sînt în general metale sau semimetale. La astfel de solide suprafața Fermi are sens fizic și la  $T \neq 0\text{ K}$ . Asemenea suprafețe izoenergetice pot fi suprafețe închise sau deschise, de diferite forme, fiind funcție de natura metalului respectiv. De exemplu, la metalele monovalente, la care

banda de valență este parțial ocupată, suprafața Fermi are forma unei sfere, motiv pentru care se mai numește și sfera Fermi.

O a doua grupă de solide o formează acelea la care deasupra ultimei benzi ocupate cu electroni urmează o bandă complet liberă, despărțite între ele printr-o bandă energetică interzisă  $W_g$ , în care este plasat nivelul Fermi. În funcție de lărgimea benzii interzise, numită și energie de activare, solidele din această grupă se împart în dielectrici (izolatori) și semiconductori. Dielectricii includ acele solide la care  $W_g > 3$  eV (fig. 7.20, c). De exemplu, diamantul are  $W_g = 5,2$  eV, iar  $\text{Al}_2\text{O}_3$  are  $W_g = 7$  eV etc. Un cîmp electric de valori obișnuite nu face posibilă trecerea electronilor din banda de valență în banda de conducție. Cîmpuri puternice, de ordinul a  $10^8$  V/m pot realiza acest lucru, fenomenul numindu-se străpungere electrică. Semiconductorii, deși la 0 K sînt și ei izolatori, la temperaturi mai înalte o parte dintre electronii din banda de valență pot trece în banda de conducție, deoarece au lărgimea benzii interzisă  $W_g \approx 1$  eV (fig. 7.20, d). De exemplu, la germaniu  $W_g = 0,66$  eV, la siliciu  $W_g = 1,08$  eV, la SbIn  $W_g = 0,17$  eV, la AsGa  $W_g = 1,43$  eV etc.

## 7.6. Proprietățile fizice ale solidelor

Proprietățile fizice ale corpurilor solide depind atât de elementele rețelei cristaline și de interacțiunile dintre particulele aflate în nodurile rețelei, cît și de mișcarea electronilor liberi sau cvasilibri și interacțiunea dintre ei și elementele bazei rețelei cristaline. Unele dintre proprietățile fizice ale solidelor, cum sînt proprietățile mecanice și termice pot fi interpretate, neglijînd mișcarea electronilor sau în orice caz aceștia contribuind cu un termen de corecție la mărimea mecanică sau termică. În același timp, proprietățile electrice și magnetice pot fi înțelese numai considerînd mișcarea electronilor prin rețeaua cristalină. În cele ce urmează vom discuta pe scurt unele proprietăți fizice ale corpului solid.

### 7.6.1. Proprietăți mecanice

O serie de proprietăți mecanice, cum sînt elasticitatea, plasticitatea, duritatea, fluajul, ductilitatea, rezistența la oboseală etc., constituie și cele mai caracteristice pro-

prietăți ale solidelor. Cunoașterea lor este de mare importanță în industrie și în economie în general, motiv pentru care au fost studiate de-a lungul timpului. O serie de nume date diferitelor perioade ale culturii umane, cum sînt epoca de piatră, epoca bronzului sau epoca fierului, reflectă numele unor solide, ale căror proprietăți mecanice au determinat un salt calitativ în procesul dezvoltării societății umane.

Proprietățile mecanice ale solidelor enumerate mai sus se datorează în special proprietăților rețelei cristaline.

Presupunem că o forță deformatoare acționează asupra unui corp solid. Sub acțiunea acestei forțe, constituenții (atomi, ioni) ce formează rețeaua cristalină se deplasează din pozițiile lor de echilibru, solidul suferind o deformare. Dacă forța deformatoare nu este prea mare, deci distanța dintre nodurile rețelei cristaline nu depășește o anumită valoare critică, la suprimarea forței dispăre și deformarea care se numește în acest caz elastică. Din contră, dacă forța deformatoare depășește o anumită valoare, deformarea devine plastică, caz în care corpul nu mai revine la forma inițială.

În § 7.2 s-a arătat că energia de interacțiune dintre doi atomi  $A$  și  $B$  este funcție de distanța  $r$  dintre ei, așa cum arată curba  $V(r)$  desenată prin linie plină în figura 7.21, a.

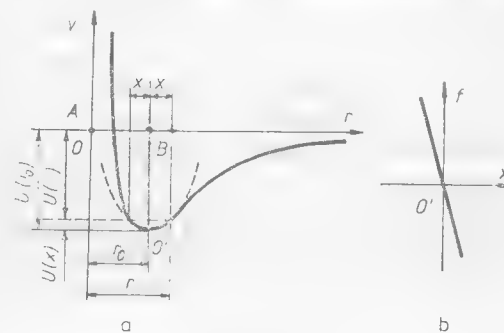


Fig. 7.21.

Dacă atomul  $B$  se deplasează cu distanța  $x$  de poziția de echilibru  $r_0$ , atunci la un moment dat se va afla, față de atomul  $A$ , la distanța  $r = r_0 + x$  și energia particulei devine  $V(r)$ . Se poate calcula variația energiei particulei  $V(x) = V(r) - V(r_0)$  prin dezvoltarea în serie Taylor a

funcției  $V(x)$  după puterile lui  $x$ ,

$$V(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r_0} x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r_0} x^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 V}{\partial r^3} \right)_{r_0} x^3 + \dots \quad (7.22)$$

Întrucît curba energiei potențiale trece printr-un minim în dreptul punctului  $O'$ , rezultă că  $(\partial V / \partial r)_{r_0} = 0$  și deci

$$V(x) \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_{r_0} x^2 = \frac{1}{2} k x^2,$$

unde  $k$  este constanta de elasticitate a corpului. Această expresie este doar aproximativă, întrucît am considerat numai termenul pătratic din relația 7.22, neglijînd termenii de ordin superior. Dependența corectă  $V = f(r)$  este exprimată prin parabola desenată punctat în figura 7.21, a.

În mod asemănător, forța de interacțiune dintre cei doi atomi, cînd distanța dintre ei variază cu valoarea  $x$ , va fi

$$f = - \frac{\partial V(x)}{\partial x} = - kx,$$

variația forței în funcție de distanța  $x$  fiind arătată în figura 7.21, b.

Am obținut în acest fel un rezultat deosebit, cînd forța care acționează asupra unei particule este proporțională cu deplasarea sa față de poziția de echilibru, iar energia sa potențială este proporțională cu pătratul acestei deplasări. Aceasta corespunde așa-numitei aproximații armonice. Vom folosi acest rezultat pentru deducerea legii lui Hooke în elasticitate.

Presupunem că o pereche de forțe armonice  $F$  acționează asupra capetelor opuse ale unei bare solide de lungime  $l$  și secțiune  $S$  (fig. 7.22). Ca urmare a acestei acțiuni,

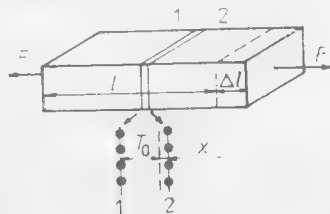


Fig. 7.22.

distanța dintre două plane cristaline vecine crește cu valoarea  $x$ , iar întreaga bară se alungește cu  $\Delta l$ . În bara respectivă apar tensiuni interne  $F$  care se vor opune deplasării atomilor din nodurile rețelei cristaline, față de poziția de echilibru,

$$F = f N = N k x,$$

unde  $N$  este numărul de particule din stratul atomic de secțiune  $S$ .

Efortul unitar care apare în bară va fi

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{N}{S} k x = c x,$$

unde  $c = N k / S$ . Multiplicînd și împărțind termenul drept din ultima relație cu  $r_0$  — distanța dintre două plane cristaline vecine, se obține

$$\sigma = c r_0 \cdot \frac{x}{r_0} = E \varepsilon,$$

unde

$$E = c r_0 = \frac{N}{S} k r_0$$

este modul de elasticitate, sau modulul lui Young (la metale  $E \simeq 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>), iar

$$\varepsilon = \frac{x}{r_0}$$

este variația relativă a parametrului rețelei în direcția forței externe  $F$ .

Se poate găsi alungirea relativă a barei studiate, dacă multiplicăm atît numărătorul cît și numitorul expresiei lui  $\varepsilon$  cu numărul de straturi atomice  $N'$  conținute în eșanșionul de lungime  $l$ ,

$$\varepsilon = \frac{x N'}{r_0 N'} = \frac{\Delta l}{l}.$$

În acest fel, relația

$$\sigma = E \varepsilon$$

reprezintă bine-cunoscuta lege a lui Hooke, care afirmă că efortul unitar este proporțional cu alungirea relativă, cînd forța deformatoare nu depășește o anumită valoare.



Modulul de elasticitate  $E$  depinde numai de natura constituenților din care este făcut corpul și din modul lor de aranjare în rețeaua cristalină. În figura 7.23 este arătată variația  $\sigma = f(\epsilon)$ . Proportionalitatea dintre  $\sigma$  și  $\epsilon$  se respectă numai pe porțiunea liniară  $OP$ , iar pe por-

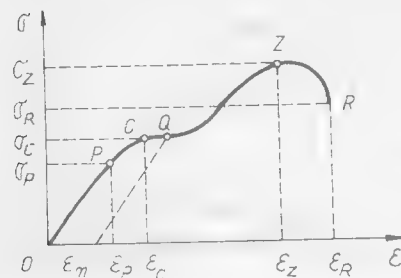


Fig. 7.23.

țiunea  $PC$ , coexistă atât deformarea elastică cât și cea plastică. În punctul  $C(\sigma_C, \epsilon_C)$ , numit punct critic, începe deformarea plastică, deformare ce se menține total sau parțial și după suprimarea forței. Punctul critic reprezintă limita de curgere sau de fluiditate, după care materialul „curge” fără vreo solicitare suplimentară. Dacă după atingerea limitei de elasticitate, curba  $\sigma = f(\epsilon)$  prezintă porțiunea  $QZ$ , se spune că materialul din care este făcută bara de studiat suferă o transformare numită ecrusaj. Fenomenul are loc la metale și aliaje și constă în întărirea lor ca urmare a deformării la rece. Pentru a reveni la proprietățile anterioare, metalul se recoace, ceea ce face ca cristalele deformate să se recritalizeze, adică să revină la forma lor inițială.

Crescând în continuare efortul unitar, se ajunge în punctul  $Z$ , numit limită de rezistență, când bara începe să se gîtuie, iar în punctul  $R$  are loc ruperea ei.

Atît la întindere cât și la comprimare se schimbă și dimensiunile transversale ale barei. Dacă  $d_0$  este dimensiunea transversală, se verifică relația

$$\beta = \frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0} = -\mu \frac{\sigma}{E},$$

unde  $\mu$  este coeficientul lui Poisson ( $\mu \approx 0,3$  pentru metale).

Există totuși unele deosebiri între datele experimentale privind caracteristicile mecanice ale corpului solid și cele teoretice, dacă pentru acestea din urmă s-a folosit

modelul de corp solid constituit din cristale ideale. Acest lucru a fost pus pe seama rețelei cristaline imperfecte, care stă la baza constituirii corpurilor naturale. S-a constatat, de exemplu, că dislocațiile au un rol hotărîtor în gradul de manifestare al unor proprietăți ale solidelor. Un număr mare de dislocații într-un metal îl face mai ușor deformabil, cheltuindu-se o energie mai mică pentru deformare.

Alte proprietăți caracteristice metalelor, cum sînt oboseala metalelor (proprietatea de a deveni casante ca urmare a deselor solicitări) și fluajul (variația deformațiilor în timp) n-au primit încă o explicație științifică satisfăcătoare.

## 7.6.2. Proprietăți termice

Ca și proprietățile mecanice și proprietățile termice ale solidelor pot fi explicate pe seama comportării particulelor ce se află în nodurile rețelei cristaline. Dintre proprietățile termice vor fi discutate pe scurt căldura molară, conduc-tivitatea termică și dilatarea termică.

Căldura molară  $C$  a solidelor se definește ca fiind căldura necesară unui mol de substanță pentru a-i ridica temperatura cu un grad.

Căldura masică  $c$ , este căldura necesară unității de masă de substanță pentru a-i ridica temperatura cu un grad. Cele două mărimi sînt legate prin relația  $C = \mu c$ ,  $\mu$  fiind masa unui mol de substanță și deci  $C$  și  $c$  au aceleași variații la variația unor parametri. Au fost imaginate mai multe modele pentru explicarea căldurii molare (specifice). În modelul clasic se consideră că fiecare atom aflat în nodul rețelei cristaline reprezintă un oscilator armonic liniar și independent, care poate oscila pe trei direcții reciproce perpendiculare. Conform mecanicii clasice, fiecare oscilator posedă energia pe un grad de libertate egală cu  $k_B T$ , formată din energie cinetică și energie potențială, în părți egale ( $k_B$  este constanta lui Boltzmann).

Considerînd că cristalul este compus din  $N$  atomi, fiecare avînd trei grade de libertate, rezultă că energia internă va fi

$$U = 3N k_B T,$$

iar căldura molară la volum constant a corpului va fi

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3 N k_B.$$

Dacă se va lua chiar un mol de solid, deci  $N$  va fi egal cu numărul lui Avogadro  $N_A$  și cum  $N_A \cdot k_B = R$  — constanta universală a gazelor, rezultă

$$C_V = 3 R = 25 \text{ J/grad. mol},$$

ceea ce arată că de fapt căldura molară are valoare constantă și este independentă de temperatura și de natura solidului. Acest enunț reprezintă legea lui Dulong și Petit.

Experiența a arătat însă că spre temperaturi mai mici, legea nu este valabilă și, conform principiului al treilea al termodinamicii, căldura molară tinde spre zero. În figura 7.24 este arătată dependența  $C_V = f(T)$  pentru câteva substanțe solide. Linia punctată corespunde valorii căldurii molare, date de legea lui Dulong-Petit.

Pentru a explica comportarea căldurii molare la temperaturi mici, Einstein a elaborat un nou model de solid,

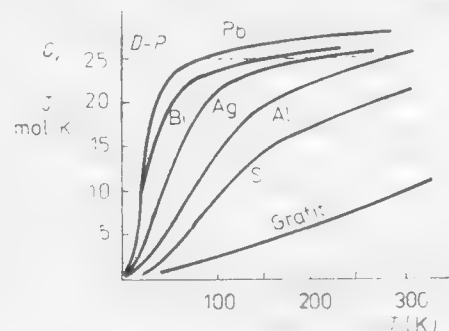


Fig. 7.24.

ținând seama de cuantificarea energiei sistemelor de particule legate. Conform acestui model, cele  $N$  particule din nodurile rețelei cristaline constituie  $3N$  oscilatori armonici liniari, independenți, care oscilează toți cu aceeași frecvență  $\nu = \omega/2\pi$ . Conform teoriei elaborate de Planck, energia fiecărui oscilator variază în salturi egale cu  $\epsilon = \hbar \omega$  și nu continuu, cum afirmă mecanica clasică.

Întrucât chiar la  $0 \text{ K}$ , fiecare asemenea oscilator mai posedă o energie de zero  $\epsilon_0 = \hbar \nu/2$ , rezultă că energia

totală a oscilatorului va fi

$$\epsilon_n = \epsilon_0 + n\epsilon \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Se poate calcula energia medie  $\langle \epsilon \rangle$  a oscilatorului considerind că probabilitatea  $\mathfrak{P}_n$  ca oscilatorul să posedă energia  $\epsilon_n$  este dată de formula lui Boltzmann,

$$\mathfrak{P}_n = A \exp[-\epsilon_n/(kT)] = A \exp[-(\epsilon_0 + n\epsilon)/(kT)],$$

unde  $A$  este o constantă, ce se determină din condiția de normare a probabilității,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n = \exp[-\epsilon_0/(kT)] A \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-n\epsilon/(kT)] = 1.$$

Se poate scrie energia medie a oscilatorului astfel :

$$\langle \epsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \mathfrak{P}_n =$$

$$= \epsilon_0 + \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} n \exp[-n\epsilon/(kT)] / \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-n\epsilon/(kT)].$$

Conform formulei pentru progresia geometrică, avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-n\epsilon/(kT)] = \{1 - \exp[-\epsilon/(kT)]\}^{-1}$$

Diferențiind ambii termeni în raport cu  $\epsilon$ , se obține

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \exp[-n\epsilon/(kT)] =$$

$$= \exp[-\epsilon/(kT)] \{1 - \exp[-\epsilon/(kT)]\}^{-2}$$

și deci energia medie a oscilatorului se scrie

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon_0 + \frac{\epsilon}{\exp[\epsilon/(kT)] - 1}.$$

Considerind că cristalul conține  $N_A$  oscilatori, rezultă energia

$$U = 3N_A \langle \epsilon \rangle = 3N_A \epsilon_0 + \frac{3N_A \epsilon}{\exp[\epsilon/(kT)] - 1},$$

de unde se obține căldura molară la volum constant,

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3N_A k \left( \frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 \exp [\varepsilon/(kT)] / \{ \exp [\varepsilon/(kT)] - 1 \}^2.$$

Aceasta reprezintă formula lui Einstein pentru căldura molară și ea descrie corect variația  $C_V = f(T)$ . Se observă că pentru temperaturi suficient de mari ( $T \rightarrow \infty$ ),  $C_V \rightarrow 3N_A k = 3R$ , iar pentru  $T \rightarrow 0$  se obține

$$C_V = 3R [\varepsilon/(kT)]^2 \exp [-\varepsilon/(kT)] \rightarrow 0.$$

Dacă se compară rezultatele experimentale ale căldurii molare cu cele teoretice, obținute din teoria lui Einstein, se constată unele abateri la temperaturi mici. Formula lui Einstein dă valori mai mici decît cele experimentale, datorită faptului că s-a impus ca oscilatorii să fie independenți și să oscileze toți cu aceeași frecvență.

Din acest motiv, s-a impus dezvoltarea unui alt model de solid, care să țină seama de interacțiunea dintre atomii aflați în nodurile rețelei cristaline. Un model îmbunătățit a fost propus de Debye, care are la bază atît conceptul de cuantificare a energiei oscilațiilor din rețeaua cristalină, cît și faptul că rețeaua solidului este considerată ca o unitate în care se propagă undele mecanice. Asemănător fotonilor din fluxul electromagnetic, se consideră că purtătorii undelor mecanice din cristal sînt niște particule fictive, numite fononi, al căror număr crește proporțional cu temperatura.

**Conductivitatea termică.** Conducția termică este un fenomen de transfer și, ca și alte fenomene de acest tip, el are loc ca urmare a existenței unei situații de neechilibru în sistem. Mai concret, existența unui gradient de temperatură în solid, face posibil transferul energiei termice, dintr-o parte a solidului, în care temperatura este mai mare, în altă parte a solidului, în care temperatura este mai mică.

În cazul solidelor, transferul de energie se realizează prin diverse mecanisme, în funcție de tipul solidului: electronii liberi la metale și fononii în dielectrici și semiconductori. La oricare dintre tipurile de solide, considerat

ca mediu izotrop, experiența arată că este valabilă legea lui Fourier,

$$Q = -\eta \frac{dT}{dx}, \quad (7.23)$$

unde  $Q$  este densitatea fluxului de căldură.

Vom descrie pe scurt un model cinetic, din care să rezultă expresia coeficientului de proporționalitate  $\eta$ , numit coeficient de conductivitate termică. În acest scop, considerînd că electronii și fononii formează un amestec de gaze, ca urmare a ciocnirilor electron-electron sau fonon-fonon, energia este transferată în direcția scăderii gradientului de temperatură, transferul avînd loc pînă la stabilirea unui echilibru termic.

Fie deci trei plane paralele, separate prin distanțe egale cu drumul liber mediu (fig. 7.25). Presupunînd că fiecare dintre componenți se deplasează cu viteza medie

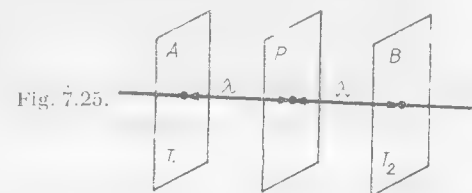


Fig. 7.25.

$\langle v \rangle$  și că această viteză nu se schimbă pe distanța drumului liber mediu, înseamnă că prin planul imaginat  $P$  trec liber de la stînga la dreapta o șesime din numărul total de particule aflate la temperatura  $T_1$ , iar energia transferată prin unitatea de arie și în unitatea de timp va fi

$$Q_A = \frac{1}{6} N \langle v \rangle \left( \frac{3}{2} k_B T_1 \right),$$

unde  $k_B$  este constanta Boltzmann, iar  $\langle v \rangle$  este viteza medie a undelor mecanice, care este egală cu viteza sunetului prin solidul respectiv.

În mod asemănător, energia transferată de la dreapta spre stînga va fi

$$Q_B = \frac{1}{6} N \langle v \rangle \left( \frac{3}{2} k_B T_2 \right).$$

Considerind  $T_1 > T_2$ , energia netă transferată va fi

$$Q = \frac{1}{4} N \langle v \rangle k_B (T_1 - T_2).$$

Conform celor spuse mai sus, o particulă suferă două ciocniri, una în planul  $P$  și alta în planul  $B$ , astfel că gradientul de temperatură traversat va fi

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{2 \langle \lambda \rangle}.$$

Înlocuind aceste rezultate în relația (7.23), rezultă

$$\frac{1}{4} N \langle v \rangle k_B (T_1 - T_2) = \eta \frac{T_1 - T_2}{2 \langle \lambda \rangle},$$

de unde

$$\eta = \frac{1}{2} N k_B \langle \lambda \rangle \langle v \rangle = \frac{1}{3} C_V \langle \lambda \rangle \langle v \rangle, \quad (7.24)$$

în care am înlocuit  $C_V$  — capacitatea calorică pe unitatea de volum, cu  $\frac{3}{2} N k_B$ . Trebuie să menționăm aici că nu

toți electronii atomilor dintr-un metal participă la transferul energiei termice. La temperatura camerei, vor realiza acest lucru numai electronii din apropierea nivelului Fermi, deoarece numai aceștia pot efectua salturi cuantice. Acest lucru arată, o dată în plus, că gazul electronic nu este în totalitate analog cu gazul termodinamic, una dintre deosebiri constind în aceea că gazului electronic nu i se poate aplica teorema echipartiției energiei pe grade de libertate.

Variația coeficientului de conductivitate termică în funcție de temperatură prezintă un maxim la o temperatură caracteristică fiecărui solid și apoi scade, atât spre temperaturi mai mari, cât și spre temperaturi mai joase (fig. 7.26). La temperaturi mai mari decât temperatura caracteristică, scăderea lui  $\eta$  se datorează scăderii lui  $\langle \lambda \rangle$ , care este proporțional cu  $1/T$ ; la temperaturi sub cele caracteristice, apropiate de 0 K, scăderea lui  $\eta$  are loc datorită scăderii lui  $C_V$ , care scade ca  $T^3$ .

Dilatarea termică este fenomenul fizic care constă în creșterea dimensiunilor geometrice ale corpului solid în

urma măririi temperaturii sale, fără schimbarea stării de agregare. Pentru a explica dilatarea corpurilor, să vedem ce se întâmplă cu dimensiunile rețelei cristaline, atunci când solidului i se transferă energie.

Se constată că o parte considerabilă a energiei transferate solidului, se regăsește sub forma energiei mecanice a particulelor aflate în nodurile rețelei cristaline. Aceasta înseamnă că cu cât crește mai mult temperatura, cu atât crește amplitudinea de vibrație a particulelor aflate în nodurile rețelei cristaline. Rezultă că spațiul măsurat dintre nodurile rețelei cristaline este de fapt o medie între o valoare maximă și una minimă a constantei rețelei. Din acest motiv este interesant de cunoscut, de exemplu, cum variază constanta rețelei cristaline cu temperatura și în general de aflat care este explicația dilatării solidelor la creșterea temperaturii.

Pentru a răspunde la aceste probleme, să revenim la dependența energiei potențiale de interacțiune dintre două particule ale solidului, în funcție de distanța dintre ele, în interpretarea clasică, considerind, pentru simplitate, că particula 1 este fixă și că numai particula 2 poate să vibreze (fig. 7.27). În aproximația armonică, această de-

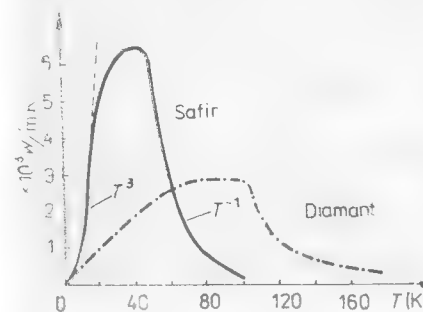


Fig. 7.26.

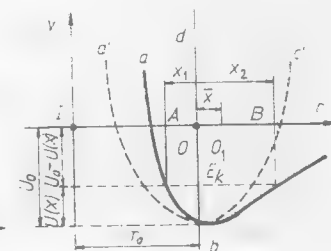


Fig. 7.27.

pendență este reprezentată prin curba punctată  $a'c'$  care este o parabolă, simetrică față de linia  $bd$ . Valoarea constantei rețelei cristaline pentru un solid oarecare rezultă din echilibrul dintre forțele attractive și cele repulsive, ca și energiile potențiale respective. La 0 K particulele ocupă nivelul cel mai de jos  $U_0$ , corespunzător fundului gropii de potențial. Valoarea constantei rețelei este egală cu distanța măsurată pe abscisă, până în punctul corespun-

zător minimului energiei potențiale de interacțiune; fie această valoare egală cu  $r_0$ .

Pe măsura creșterii temperaturii, o parte din energie se află sub formă de energie mecanică. Deși amplitudinea vibrațiilor crește, dacă se ține seama numai de aproximația armonică, n-ar trebui ca solidul să-și schimbe dimensiunea. Într-adevăr, în cazul aproximației armonice, deplasarea particulei cu distanța  $x$  de la poziția de echilibru este strict proporțională cu această distanță,

$$f(x) = -kx, \quad (7.25)$$

iar energia potențială este

$$V(x) = kx^2. \quad (7.26)$$

Cum forța  $f(x)$  rămâne constantă în timp, pentru o temperatură dată, rezultă că și deplasările  $x_1$  și  $x_2$ , efectuate de particulă, în dreapta și în stînga punctului de echilibru vor fi egale, deci  $\langle x \rangle = 0$  și media constantei rețelei cristaline rămîne practic aceeași la orice temperatură, deși amplitudinea de vibrație crește o dată cu temperatura.

Dacă se ține seama de termenii de ordin superior, graficul energiei potențiale nu mai este o curbă simetrică; ci este reprezentat prin crurba  $abc$ , cele două ramuri ale curbei avînd pante diferite (fig. 7.27). Ramura din dreapta are o pantă mai mică și arată că variațiilor mici ale energiei potențiale le corespund variații mai mari ale distanței  $r$  dintre particule.

Faptul că cele două ramuri ale curbei  $abc$  nu sînt simetrice înseamnă de fapt că vibrațiile sînt anarmonice și că în expresia energiei potențiale trebuie adăugat un termen de ordinul trei, care să exprime asimetria curbei de potențial. În acest fel, energia potențială și forța elastică vor avea expresiile

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{gx^3}{3}, \quad (7.27)$$

$$f(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx + gx^2, \quad (7.28)$$

unde  $g$  este coeficientul de anarmonicitate.

Ca rezultat, apare faptul că deplasările  $x_1$  și  $x_2$  ale particulei 2 de-o parte și de alta a poziției de echilibru nu

vor mai fi egale, în timp ce media amplitudinilor de vibrație va fi diferită de zero,  $\langle x \rangle \neq 0$ .

Ținînd seama de toate acestea, să exprimăm coeficientul de dilatare termică liniară. Valoarea medie a forței ce deplasează particula 2 din poziția de echilibru este

$$\langle f \rangle = -k\langle x \rangle + g\langle x^3 \rangle.$$

În starea de echilibru termic, cînd particula vibrează liber,  $\langle f \rangle = 0$  și deci  $g\langle x^3 \rangle = k\langle x \rangle$ . Se obține

$$\langle x \rangle = \frac{g}{k} \langle x^3 \rangle. \quad (7.29)$$

Pe de altă parte, scriind media energiei potențiale sub forma

$$\langle V(x) \rangle = \frac{k}{2} \langle x^2 \rangle, \quad (7.30)$$

rezultă că

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2\langle V(x) \rangle}{k}$$

care, înlocuită în (7.29), dă

$$\langle x \rangle = \frac{2g}{k} \langle V(x) \rangle.$$

Cum în timpul vibrației particulei, energia potențială  $V(x)$  maximă în punctele  $A$  și  $B$ , se transformă în energia cinetică  $W_c$ , maximă în poziția de echilibru  $O$ , rezultă că energia totală medie este

$$\langle W \rangle = \langle W_c \rangle + \langle V(x) \rangle = 2\langle V(x) \rangle.$$

Rezultă că putem scrie  $\langle x \rangle$  astfel

$$\langle x \rangle = \frac{g}{k^2} \langle W \rangle. \quad (7.31)$$

Ținînd seama că, prin definiție, dilatarea liniară relativă se definește ca raportul  $\langle x \rangle / r_0$ , unde  $r_0$  este distanța de echilibru, rezultă

$$\frac{\langle x \rangle}{r_0} = \frac{g}{k^2 r_0} \langle W \rangle.$$

Conform principiului de echipartiție a energiei pe grade de libertate, avem  $\langle W \rangle = k_B T/2$  și deci

$$\frac{\langle x \rangle}{r_0} = \frac{g k_B}{k^2 r_0} \cdot T. \quad (7.32)$$

Conform relației de definiție a coeficientului de dilatare liniară  $\alpha = (l - l_0)/l_0 T$ , ținând seama de (7.32) rezultă

$$\alpha = \frac{\langle x \rangle}{r_0 T} = \frac{g k_B}{k^2 r_0}. \quad (7.33)$$

Înlocuind valorile lui  $g$ ,  $k_B$ ,  $k$  și  $r_0$  se obțin pentru  $\alpha$  valori de ordinul  $10^{-4} - 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$ , ceea ce înseamnă cam 1 mm pentru 1 m lungime la  $100^\circ\text{C}$ , în bun acord cu datele experimentale.

Legea dilatării liniare (7.33) rămâne valabilă numai la valori medii ale temperaturii, întrucît la  $T \rightarrow 0\text{K}$ , dilatarea este practic absentă, iar la temperaturi mai ridicate, în apropierea celei de topire, apar abateri considerabile.

### 7.6.3. Proprietăți electrice

**Conductivitatea electrică.** Cea mai importantă proprietate caracteristică dintre proprietățile electrice ale solidelor este rezistența electrică  $R$ , care este funcție de natura și geometria lor. Pentru un solid de formă paralelipipedică avînd lungimea  $l$  și aria secțiunii  $S$ , avem  $R = \rho l/S$ , unde  $R$  se măsoară în ohmi ( $\Omega$ ), iar  $\rho$  — rezistivitatea în ( $\Omega \cdot m$ ). Conductivitatea electrică  $\sigma = 1/\rho$  este mărimea inversă rezistivității și se măsoară în ( $\Omega^{-1} m^{-1}$ ). Conductivitatea solidelor este o mărime foarte importantă și ea are valori cuprinse între  $10^8 \Omega^{-1} m^{-1}$  pentru cupru și  $10^{-15} \Omega^{-1} m^{-1}$  pentru polistiren. Această gamă largă de valori a conductivității electrice și interdependența sa cu alte mărimi fizice au determinat căutarea unor explicații pentru interpretarea faptelor experimentale observate.

Prima teorie a conductivității electrice a fost dată de Drude; teoria are la bază existența electronilor liberi în metale, numiți și electroni de conducție. Drude consideră metalul ca o rețea de ioni pozitivi printre care se mișcă liber electronii cu viteza termică constantă, pentru o temperatură dată, conform legilor teoriei cinetice. Prin aplicarea unui cîmp electric  $\vec{E}$ , viteza electronului liber

se modifică și apare o componentă a sa, numită viteza de alunecare sau viteza de drift. În același timp, ciocnirile electronilor cu rețeaua cristalină determină ca aceștia să piardă din energia lor, fenomenul în sine fiind cauza rezistenței electrice.

Într-o astfel de ciocnire, un electron individual își poate reduce viteza de drift la zero, pentru ca imediat după aceasta să atingă din nou valoarea dinainte de ciocnire. În această situație, densitatea de curent  $\vec{j}$  este de forma

$$\vec{j} = ne\vec{u}, \quad (7.34)$$

unde  $n$  este numărul de electroni din unitatea de volum,  $e$  — sarcina electronului și  $u$  — viteza de drift.

Dacă timpul mediu dintre ciocniri este  $2\tau$ , în acest timp asupra electronului va acționa forța  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , unde  $\vec{E}$  este intensitatea cîmpului aplicat.

Aplicînd legea a doua a dinamicii, rezultă

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -e\vec{E} \quad (m = \text{masa electronului}),$$

$$d\vec{u} = -\frac{e\vec{E}}{m} dt,$$

$$\vec{u} = -e \frac{\vec{E}t}{m} + \text{const.}$$

Folosind această relație, rezultă că viteza electronului în momentul imediat dinaintea ciocnirii ( $t = 2\tau$ ) este:  $-(e\vec{E} 2\tau)/m$  iar viteza medie va fi

$$\vec{u} = -\frac{e\vec{E}}{m} \cdot \tau,$$

unde  $\tau$  se numește timp de relaxare și reprezintă timpul necesar pentru ca probabilitatea de ciocnire să fie egală cu unitatea.

Înlocuind expresia vitezei de drift în (7.34), se obține

$$\vec{j} = \frac{ne^2\vec{E}}{m} \tau$$

și avînd în vedere legea lui Ohm,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (7.35)$$



rezultă conductivitatea electrică,

$$\sigma = \frac{\vec{J}}{E} = \frac{ne^2\tau}{m} = ne \left( \frac{e\tau}{m} \right) \quad (7.36)$$

și pentru viteza de drift,

$$\vec{u} = \frac{e\tau}{m} \cdot \vec{E}.$$

Viteza în câmp electric unitar se numește mobilitate și are expresia

$$\mu = \frac{u}{E} = \frac{e\tau}{m}.$$

Unitatea pentru mobilitate este  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ . Înlocuind  $\vec{u} = \mu \vec{E}$  în (7.34) și ținând seama de (7.35), rezultă

$$\begin{aligned} \vec{J} &= ne\mu \vec{E}, \\ \sigma &= ne\mu. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Relația (7.37) are o importanță fundamentală. Conductivitatea electrică depinde de doi factori: numărul  $n$  al purtătorilor de sarcini din unitatea de volum și mobilitatea lor  $\mu$ . Modul în care acești doi factori variază cu temperatura determină înțelegerea proprietăților electrice ale solidului. De exemplu, la metale  $n$  este constant, iar  $\mu$  variază puțin cu temperatura. La semiconductori, variația exponențială a lui  $n$  cu temperatura este esențială, în timp ce la izolatori  $n$  este constant, iar  $\mu$  variază exponențial cu temperatura. Iată de ce înțelegând modul în care contribuie  $n$  și  $\mu$  la valoarea lui  $\sigma$ , ne dăm seama de spectrul larg de valori ale acestei mărimi fizice.

Extinzând teoria clasică a lui Drude, se poate ajunge la legea lui Wiedemann-Franz, care dă raportul dintre conductivitatea termică și conductivitatea electrică, folosind teoria cinetică.

Conform celor spuse mai înainte, când s-a vorbit despre conductivitatea termică, între viteza termică  $\langle v \rangle$  și drumul liber mediu  $\langle \lambda \rangle$  există relația

$$2\tau = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}. \quad (7.38)$$

Să notăm că viteza termică  $\langle v \rangle$ , definită din teoria cinetico-moleculară, nu este aceeași cu viteza de drift  $u$ . În timp ce  $\langle v \rangle$  reprezintă o viteză medie, corespunzătoare stării termodinamice de echilibru a sistemului și este de ordinul  $4 \cdot 10^3$  m/s, la temperatura camerei,  $u$  — viteza de drift — este de ordinul  $10^{-3}$  m/s și se adună vectorial cu viteza termică, pentru a obține viteza totală a electronului.

Conductivitatea termică  $\chi$  a electronilor liberi, care formează gazul electronic este de forma (7.24)

$$\chi = \frac{1}{2} nk_B \langle \lambda \rangle \langle v \rangle.$$

Folosind (7.36) și (7.38), se obține

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}. \quad (7.39)$$

Deoarece în statistica clasică

$$\frac{1}{2} m \langle v \rangle^2 = \frac{3}{2} k_B T, \quad (7.40)$$

rezultă

$$m \langle v \rangle = \frac{3k_B T}{\langle v \rangle},$$

astfel încît

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle \langle v \rangle}{6k_B T},$$

de unde

$$\frac{\chi}{\sigma} = 3 \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 T,$$

care reprezintă legea lui Wiedemann-Franz. Constanta de proporționalitate  $3(k_B/e)^2$  se numește numărul lui Lorentz și are valoarea  $2,23 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega \text{ grad}^{-2}$ , în bună concordanță cu valorile experimentale ale lui  $\chi/\sigma T$  pentru o serie întreagă de metale, la temperatura camerei.

Relația (7.40) prezice o dependență greșită a lui  $\sigma$  de temperatură; folosind expresia (7.36), se obține

$$\sigma \sim \tau \sim \frac{1}{\langle v \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{T}} \text{ și deci } \rho \sim \sqrt{T}.$$

Într-adevăr, această dependență nu este corectă, deoarece experiența arată că  $\rho \sim T$ . Eroarea este legată de faptul că am dedus dependența lui  $\rho$  de temperatură, din dependența vitezei electronului de temperatură. Dar, aceasta ne conduce la concluzia că electronii din metale nu pot fi asimilați cu un gaz din teoria cinetico-moleculară. În timp ce gazelor din teoria clasică li se aplică statistica Maxwell-Boltzmann, electronilor liberi din metale li se aplică statistica cuantică Fermi-Dirac, cum de altfel s-a mai spus.

Deși noua teorie cuantică ajunge la aceeași expresie a conductivității electrice,

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m},$$

trebuie făcute câteva precizări. Mai întâi timpul  $\tau$  se înlocuiește cu timpul de relaxare, definit ca raportul dintre distanța medie dintre nodurile rețelei cristaline și viteza termică medie a electronilor în absența cîmpului electric. În același timp, datorită ipotezei de care se folosește această teorie, anume că funcția de distribuție a electronilor din metal variază ca urmare a ciocnirilor elastice dintre electroni și defectele rețelei sau cu ionii din noduri, transportul de electroni prin metal apare ca un fenomen de propagare a undelor electronice.

Într-adevăr, prin simpla distribuție de echilibru a electronilor dintr-un metal, nu are loc transportul sarcinilor electrice. Acest lucru se întâmplă numai cînd este aplicat un cîmp electric extern, care modifică modul ocupării de către electroni a stărilor permise. Așadar, responsabili de proprietățile electrice ale metalelor sînt în cea mai mare parte electronii de conducție, adică chiar electronii de valență. Acești electroni ocupă la 0K banda de conducție, pînă la nivelul Fermi, care la metale, se află în interiorul unei benzi permise.

S-a arătat că atît în cazul teoriei electronilor liberi, cît și al benzilor de energie, energia electronului este funcție continuă de numărul de undă  $K$ ,

$$W = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}, \quad (7.41)$$

și că fiecărei valori  $\hbar K$  îi este asociată o stare definită de  $\Psi = \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r})$ . Dar, această ultimă ipoteză înseamnă

de fapt că deplasarea electronilor trebuie privită ca deplasarea unui pachet de unde, avînd viteza de grup  $v_g$ .

Să considerăm, de exemplu, că starea ocupată  $K_1$  are energia  $W_1$  (fig. 7.28); cum pentru orice undă avînd frecvența unghiulară  $\omega$ , se poate scrie  $v_g = d\omega/dK$  și  $W = \hbar\omega$ , rezultă pentru viteza de grup expresia

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dW}{dK}. \quad (7.42)$$

După un interval de timp  $\delta t$  de la aplicarea cîmpului electric  $E$ , electronii vor fi accelerați spre starea  $K_2$ , ce are energia  $W_2$ . Întrucît creșterea energiei cinetice  $\delta W = W_2 - W_1$  este egală cu scăderea energiei potențiale electrostatice, avem

$$\delta W = eE v_g \delta t = \frac{eE}{\hbar} \cdot \frac{dW}{dK} \cdot \delta t,$$

astfel încît la limită

$$\hbar \frac{dK}{dt} = eE. \quad (7.43)$$

Relația (7.43) este ecuația de mișcare pentru electronii din bandă, ecuația nefiind legată de vreo relație particulară dintre energie și vectorul de undă. Totuși pentru cîmpuri electrice foarte intense, mai mari decît cele atinse în metale, relația (7.43) nu mai este valabilă. Un asemenea efect este important la semiconductori și izolatori.

Din relația (7.41), care leagă energia benzilor de energie a electronilor liberi cu numărul de undă, se observă că  $v_g = \hbar K/m$  și deci ecuația (7.43) se poate pune sub forma

$$m v_g = eE,$$

relație care arată încă o dată că forțele ce acționează asupra electronului liber, aflat în banda de energie, sînt aceleași, ca și în cazul clasic, cu precizările despre care am vorbit mai înainte.

În cazul unei distribuții complete de stări ocupate, ecuația (7.43) arată că pentru un cîmp electric constant, fiecare stare se deplasează în spațiul  $\vec{K}$  cu aceeași viteză, astfel că întreaga distribuție se deplasează cu viteza de drift prin spațiul  $\vec{K}$ , fără să-și schimbe forma. Legat de aceasta, se constată că ecuația (7.43) reprezintă de fapt

legea de deplasare a sferei Fermi în spațiul  $\vec{K}$ . Dacă se integrează ecuația respectivă, se obține

$$K(t) - K(0) = \Delta K = \frac{eE}{\hbar} t,$$

relație ce arată că sfera Fermi s-a deplasat cu distanța  $\Delta K$  în spațiul  $\vec{K}$  (fig. 7.29). La momentul  $t = 0$ , sfera ocupă poziția I și la  $t = \tau$  (timpul de relaxare), sfera ocupă poziția II.

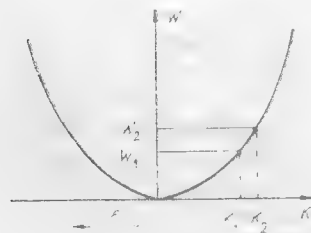


Fig. 7.28.

Până acum nu am explicat constanța curentului electric pentru un câmp dat sau, permis și nici nu am luat în considerare revenirea la echilibru după înlăturarea câmpului. Să observăm mai întâi din legea lui Ohm, fapt constatat și experimental, că pentru un câmp electric constant, densitatea de curent rămâne și ea constantă. Dar acest lucru implică faptul că electronii în urma ciocnirilor cu particulele din nodurile rețelei cristaline sint frinați în mișcarea lor prin metal.

Ca urmare a deplasării sferei Fermi, în locul poziției I rămân libere nivele energetice care pot fi ocupate prin salturi cuantice de electronii care ocupă zona a doua. Rezultă că în urma ciocnirilor elastice a electronilor cu ionii rețelei cristaline, are loc o depopulare continuă de electroni a nivelelor începând de la marginea zonei II și repopularea cu electronii zonei I.

Valoarea deplasării sferei Fermi, deci a distribuției de electroni, ținând seama de expresia conductivității electrice, permite obținerea unor informații privind tim-

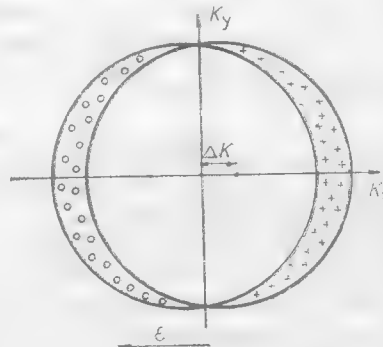


Fig. 7.29.

pul de relaxare și legătura cu alți parametri. Legat de aceasta, teoria arată și se confirmă practic că unor densități normale de curent  $j$  le corespund deplasări mici ale distribuțiilor de stări. În cazul cuprului, la care densitatea de electroni este de aproximativ  $10^{29}$  electroni/m<sup>3</sup>, se poate ajunge la o densitate de curent de aproximativ  $10^6$  A/m<sup>2</sup> și la o viteză de drift  $u_d \approx 10^{-4}$  m/s, în timp ce viteza Fermi este de aproximativ  $10^6$  m/s. Deplasarea corespunzătoare în spațiul  $\vec{K}$  este în jur de  $10$  m<sup>-1</sup>; în timp ce  $K_{\max}$  este  $10^{10}$  m<sup>-1</sup>.

Întrucât rezistivitatea cuprului la temperatura camerei este  $1,7 \times 10^{-8}$  Ωm, rezultă pentru timpul de relaxare valoarea  $10^{-13}$  s. Acest timp pare scurt, dar este suficient de mare pentru ca un electron să străbată aproximativ  $10^{-7}$  cm între ciocniri, considerate că au loc pe distanțe egale cu câteva sute de perioade ale rețelei cristaline.

Prin răcirea metalului la temperatura heliului lichid, când mișcarea termică a ionilor rețelei este eliminată și este asigurată o purificare suficient de ridicată, se pot obține rezistivități de ordinul  $10^{-13}$  Ω · m, care corespund unui drum liber mediu dintre ciocniri de aproximativ un centimetru, adică circa  $10^8$  perioade ale rețelei cristaline. Acest rezultat este foarte important pentru descrierea mișcării electronilor în solide, deoarece este esențial ca pachetul de unde să se propage pe distanțe mari, egale cu un număr mai mare de lungimi de undă, înainte de a fi împrăștiat ca urmare a ciocnirilor cu nodurile rețelei cristaline.

Semiconductorii, așa cum s-a spus mai sus, reprezintă o clasă specială de solide, care au conductivitatea electrică cuprinsă între cea a metalelor și cea a izolatoarelor. În figura 7.30 este dată o schemă de clasificare a solidelor în funcție de valoarea rezistivității, respectiv a conducti-



Fig. 7.30.

vității, din care se constată că semiconductorii prezintă și ei o gamă suficient de largă a conductivității, cuprinsă între  $10^{-5} - 10^3 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ .

Proprietățile electrice ale semiconductoarelor sunt determinate, în principal, de două cauze: a) existența benzilor energetice interzise, de mică valoare și b) prezența impurităților. Semiconductorul pur, care nu prezintă deci impurități, se numește semiconductor intrinsec și la 0 K este un izolator perfect, deci banda de conducție este complet neocupată și banda de valență este complet ocupată. La o temperatură finită, electronii aflați pe nivelul superior al benzii de valență pot fi excitați termic și ca urmare a benzii interzise mici, trec în banda de conducție. În locul electronilor, în banda de valență sunt create goluri. Deci, electronii în banda de conducție și golurile în banda de valență formează cele două tipuri de purtători de electricitate în semiconductorul intrinsec.

Cele două tipuri de purtători, unul pozitiv (golurile) și altul negativ (electronii), pot exista simultan într-un cristal și comportarea lor independentă determină o serie de proprietăți interesante ale semiconductoarelor. Rezultă că este posibil să fie modificată conductivitatea unui semiconductor schimbând concentrațiile electronilor sau ale golurilor, astfel încât semiconductorul în totalitate să rămână neutru din punct de vedere electric.

Dacă unui semiconductor intrinsec, aflat la o temperatură mai mare de 0 K i se aplică un câmp electric, în semiconductor apare un curent electric datorat deplasării golurilor în banda de valență și electronilor în banda de conducție, în același sens. Mai exact, electronii ajunși din banda de valență în banda de conducție au o mișcare în sensul contrar câmpului electric, iar locurile rămase libere în banda de valență sunt ocupate de alți electroni din banda de valență. Aceștia, la rîndul lor, lasă libere alte locuri libere, cu surplus de sarcină pozitivă, astfel că golurile se deplasează în sens opus electronilor din banda de valență, adică în același sens cu electronii din banda de conducție.

Golurile trebuie privite ca un concept fizic, în sensul că ele sînt doar niște particule fictive. Ele diferă esențial de electroni prin aceea că în timp ce electronii sînt o realitate obiectivă, golurile reprezintă un mod de reprezentare, descriind comportarea electronului în banda de valență dintr-un cristal.

Mișcarea golurilor și a electronilor poate fi descrisă cu ajutorul legilor de mișcare a particulelor libere în vid, luînd în considerare pentru fiecare particulă așa-numita masă efectivă,  $m_n^*$ , pentru electroni, și  $m_p^*$ , pentru goluri. Masa efectivă se deosebește de masa reală, în sensul că în ea este inclusă acțiunea rețelei cristaline asupra mișcării purtătorilor de electricitate. Masa efectivă poate fi pozitivă sau negativă, în funcție de tipul purtătorului de sarcină. Ea este în general mai mică decît masa de repaus; de exemplu, în cristalul de germaniu,  $m_n^* = 0,082 m_e$ , iar  $m_p^* = 0,3 m_e$ , unde  $m_e$  este masa de repaus a electronului liber.

Din cauza maselor efective diferite a celor două tipuri de purtători, vor fi diferite și vitezele de drift în câmp electric. În acest fel, densitatea de curent se scrie

$$\vec{j} = (ne\mu_n + pe\mu_p)\vec{E},$$

iar conductivitatea electrică

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p), \quad (7.44)$$

unde  $n$  și  $p$  sînt concentrațiile (densitățile) de electroni, respectiv de goluri,  $\mu_n$  și  $\mu_p$  sînt mobilitățile corespunzătoare, iar  $e$  este sarcina electronului, egală în valoare absolută cu a golului.

Într-un semiconductor intrinsec, concentrația golurilor este egală cu concentrația electronilor, deoarece fiecare electron excitat și ajuns în banda de conducție creează un gol în banda de valență. Numărul  $n$  depinde de temperatură, de lărgimea benzii interzise, de densitatea stărilor și de poziția nivelului Fermi. La semiconductorul intrinsec, nivelul Fermi se află exact la mijlocul benzii interzise, la egală distanță între banda de valență și banda de conducție. Formula pentru concentrația purtătorilor de sarcină este

$$n = 2 \left( \frac{2\pi m^* k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{W_g}{2kT} \right), \quad (7.45)$$

unde  $W_g$  este lărgimea benzii interzise.

Prezența benzii interzise cere ca purtătorii să fie activați termic și, din relația (7.45), se vede că concentrația purtătorilor de sarcină dintr-un semiconductor intrinsec crește exponențial cu temperatura și scade exponențial cu lărgimea benzii interzise.

Conform relației (7.44), aceeași comportare o are și conductivitatea  $\sigma$  a semiconductorilor, în contrast cu comportarea metalelor. Exact ca și la metale, difuzia pe rețeaua cristalină are un efect important asupra mișcării purtătorilor și, din acest motiv, mobilitatea depinde de temperatură conform relației

$$\mu = CT^{-3/2} \quad (C = \text{const}).$$

În realitate, nu există semiconductor intrinsec pur, întrucât toate cristalele, dacă nu au impurități introduse din exterior, prezintă oricum defecte ale rețelei cristaline, care, modificând structura energetică de bandă, se comportă ca niște impurități. Se convine să se considere totuși că un semiconductor este intrinsec, dacă concentrația purtătorilor datorită impurităților este neglijabilă, în comparație cu concentrația purtătorilor datorată activării termice.

Semiconductorii cu impurități se numesc extrinseci. Impuritățile sînt introduse prin substituirea unor atomi din cristal prin fenomene de difuzie sau în timpul creșterii artificiale a cristalelor. În general, atomii de impuritate diferă de atomii „gazdă” prin faptul că au valența mai mare sau mai mică cu o unitate, astfel că ei au un electron mai mult sau mai puțin, care participă la realizarea legăturii covalente. De exemplu, atomii de impuritate de As sînt pentavalenți, în timp ce atomii gazdă de Ge sînt tetravalenți, astfel că patru electroni ai As participă la realizarea legăturii covalente cu patru atomi vecini de Ge.

Cel de al cincilea electron al atomului de As rămînînd liber, este slab legat de acesta, ceea ce face ca nivelele energetice ale electronului respectiv să se situeze în banda interzisă a Ge, imediat sub banda sa de conducție. În acest fel, este necesară o energie de activare foarte mică, fiind suficientă temperatura camerei pentru ca atomul de impuritate să fie ionizat și deci să conducă la apariția electronilor în banda de conducție a elementului de bază.

În figura 7.31, a este arătată structura de bandă la 0 K a semiconductorului cu impurități la care nivelul energetic al electronilor liberi se află imediat sub banda de conducție. Un astfel de semiconductor se numește semiconductor de tip *n*, deoarece la temperaturi  $T > 0^\circ\text{K}$ , electronii liberi, aflați pe nivelul lor energetic, trec ușor în banda de conducție, devenind electroni de conducție. Nive-

lul pe care s-au aflat electronii care au ajuns în banda de conducție se numește nivel donor (fig. 7.31, b), iar impuritățile care generează asemenea electroni se numesc impurități donoare.

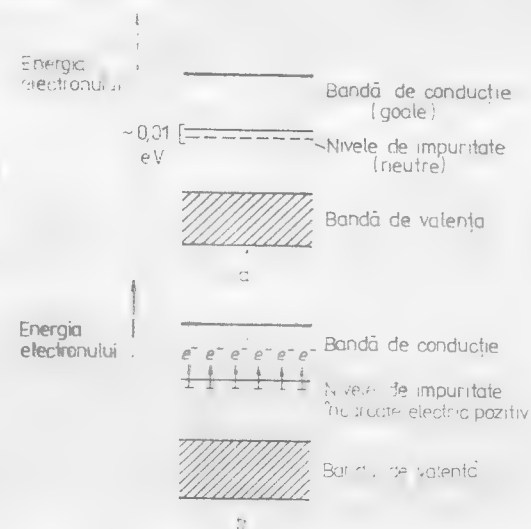


Fig. 7.31.

Să considerăm cazul în care atomul de impuritate are un electron mai puțin decât atomul elementului de bază. În figura 7.32, a este arătată situația în care semiconductorul se află la 0 K. Argumente asemănătoare celor de mai sus arată că nivelul adițional creat va fi în banda interzisă, în imediata vecinătate a benzii de valență a elementului de bază. Astfel de nivele pot fi ionizate prin captarea de electroni din banda de valență, creînd în aceasta goluri (fig. 7.32, b). Un astfel de semiconductor,

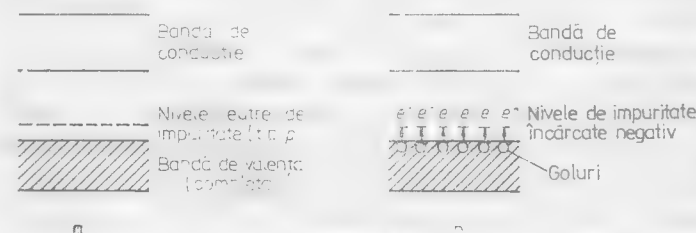


Fig. 7.32.

la care atomul de impuritate are un electron în minus față de elementul de bază, este un semiconductor de tip  $p$ ; ca exemplu, avem semiconductorul care conține atomi de In ca impurități, iar Ge ca element de bază, astfel de impurități numindu-se acceptoare.

Echilibrul dintre electroni și goluri într-un semiconductor extrinsec, la o temperatură dată, este descris statistic de următoarea relație :

$$np = n_i^2,$$

unde  $n_i$  este concentrația electronilor sau golurilor într-un semiconductor intrinsec la temperatura dată, iar  $n$  și  $p$  sînt concentrația electronilor, respectiv a golurilor în semiconductorul extrinsec.

Dependența de temperatură a conductivității unui semiconductor extrinsec este determinată în principal de variația numărului de electroni și goluri și în mai mică măsură de mobilitate. Acest lucru se întîmplă în special la temperaturi joase. La temperaturi înalte însă, cînd toți atomii de impuritate sînt ionizați, numărul purtătorilor în banda de conducție va crește rapid pînă la o valoare constantă, conducția numindu-se în acest caz extrinsecă totală și corespunde domeniului de folosire normală a dispozitivelor semiconductoare. Dacă temperatura semiconductorului crește în continuare, are loc ionizarea rețelei de bază și electronii vor trece direct din banda de valență în banda de conducție, conducția numindu-se în acest caz conducție intrinsecă sau proprie.

Mai amintim doar că datorită diferitelor proprietăți pe care le au, semiconductorii au căpătat o largă utilizare. Ca urmare a variației conductivității semiconductorilor cu temperatura, s-a construit termistorul — un semiconductor a cărui rezistență electrică depinde de temperatură. Fotorezistența este un semiconductor care își variază rezistența electrică sub influența intensității luminii și este confecționată din materiale ca seleniul. Dioda semiconductoră este formată din doi semiconductori cu impurități diferite, puși în contact; ea permite trecerea curentului electric numai într-un singur sens, ceea ce o face potrivită la redresarea curentului alternativ. Cel mai important dispozitiv cu semiconductor este tranzistorul. Este format din trei zone cu conductivitate diferită și servește la amplificarea semnalelor electrice.

Avantajele deosebite ale dispozitivelor cu semiconductori: dimensiuni mici, putere mică de alimentare, eliminarea timpului de încălzire prealabilă, durată mare de funcționare etc., au făcut ca acestea să înlocuiască în cea mai mare măsură tuburile electronice, conducind la miniaturizarea aparatelor electronice de larg consum, industriale și de cercetare științifică.

#### 7.6.4. Proprietăți magnetice

Magnetismul este o proprietate generală a tuturor corpurilor. Un corp încărcat cu sarcina  $q$  generează în jurul său un cîmp electric; cînd corpul încărcat electric se află în mișcare, în jurul lui apare un cîmp magnetic, datorat mișcării sarcinilor, să zicem, a electronilor. Din mișcarea lor cuantificată s-a dedus că unitatea de moment magnetic dipolar este egală cu un magneton Procopiu-Bohr, a cărui expresie este (v. 6.1.4)

$$\mu_B = eh/(4\pi m_0).$$

Ca urmare a existenței momentului cinetic orbital și a celui de spin, din punct de vedere magnetic, electronul este caracterizat prin momentul magnetic orbital,

$$\mu_l = m_l[eh/(4\pi m_0)],$$

și momentul magnetic de spin,

$$\mu_s = g m_s[eh/(4\pi m_0)],$$

unde  $m_l$  și  $m_s$  sînt numerele cuantice corespunzătoare celor două tipuri de mișcări ale electronului, iar  $g$  este factorul de multiplicare Landé, egal exact cu doi și arată că raportul dintre momentul magnetic și momentul cinetic corespunzător mișcării de spin este de două ori mai mare decît același raport corespunzător mișcării orbitale. Pentru a obține momentul magnetic total al atomului, se adună cele două momente ale electronilor, ținîndu-se seama de faptul că direcțiile momentelor sînt date de semnul lui  $m_l$  și  $m_s$ . Păturile complete de electroni avînd numere egale de electroni cu valori pozitive și negative ale lui  $m_l$  și  $m_s$  nu dau un moment magnetic, deoarece momentele magnetice ale electronilor se anulează reciproc. Rezultă deci că momentul magnetic provine numai de la păturile de electroni incomplete.



Modul în care fiecare corp interacționează cu câmpul magnetic este descris de vectorul intensitate de magnetizare (magnetizație)  $\vec{M}$ , definit ca momentul magnetic raportat la volum,

$$\vec{M} = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{\mu}_k}{dV}; \quad [\vec{M}] \text{SI} = \text{A/m},$$

unde  $\vec{\mu}_k$  sînt momentele magnetice atomice create de fiecare curent microscopic, iar  $\sum \vec{\mu}_k$  este suma acestor momente magnetice din elementul de volum  $dV$  (fig. 7.33).

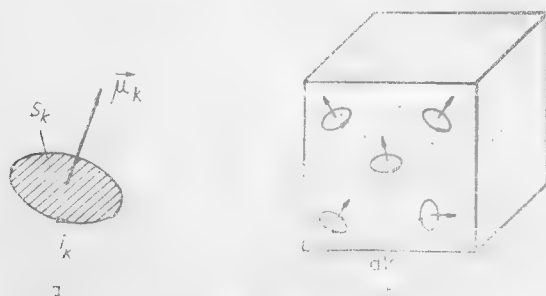


Fig. 7.33.

Între inducția magnetică  $\vec{B}$  și câmpul magnetic  $\vec{H}$  ce acționează în vid există relația

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

unde  $\mu_0$  este permeabilitatea magnetică a vidului.

Cînd o substanță magnetică se află într-un câmp magnetic  $\vec{H}$  cu magnetizația  $\vec{M}$ , inducția magnetică  $\vec{B}$  va fi în acest caz

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H},$$

unde  $\mu_r$  este permeabilitatea relativă a substanței. De aici, se obține

$$\mu_r = 1 + \frac{\vec{M}}{\vec{H}} = 1 + \chi,$$

unde  $\chi$  este susceptivitatea magnetică a substanței. În vid,  $\vec{M} = 0$  și  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ . În consecință vidul are  $\mu_r = 1$ , iar  $\chi = 0$ .

În funcție de semnul și de valoarea susceptivității magnetice  $\chi$ , de valoarea permeabilității relative, precum

și de dependența magnetizării de câmpul magnetic, substanțele se clasifică în : diamagnetice, paramagnetice, feromagnetice, antiferomagnetice și ferimagnetice. În tabelul 7.2 sînt schițate principalele caracteristici ale fiecărei

Tabelul 7.2

Clasa	Mărimea susceptivității	Dependența de temperatură a lui $\chi$	Exemple
Diamagnetice	mică și negativă $\sim -10^{-6}$	independentă	Atomi ai unor solide ce posedă pături închise și metale ca : Au, Cu, Ag, Cd
Paramagnetice	mică și pozitivă $\sim 10^{-6}$	legea Curie, $\chi = C/T$ sau legea Curie-Weiss, $\chi = C/(T - \theta)$	Atomii cu numere impare de electroni
Feromagnetice	foarte mare și pozitivă	$(\chi \rightarrow \infty)$	Paramagnetismul lui Pauli, datorat electronilor de conducție din metale Fe, Co, Ni, Gd
Antiferomagnetice	mică și pozitivă	$\chi$ scade cu temperatura	săruri și oxizi ale metalelor de tranziție, NiO, MnF <sub>2</sub> , $\alpha$ -crom
Ferimagnetice	mare și pozitivă	$(\chi \rightarrow \infty)$	Ferite, Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>

clase amintite de substanțe, iar în figura 7.34 este arătat modul cum variază magnetizarea  $\vec{M}$ , cu câmpul magnetic  $\vec{H}$  aplicat.

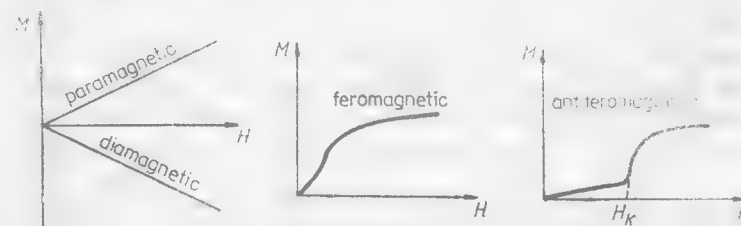


Fig. 7.34.

**Diamagnetismul** este o proprietate generală a tuturor substanțelor și constă în inducerea de către un câmp magnetic exterior a unor curenți elementari în învelișurile electronice ale atomilor. Momentelor magnetice induse sînt atît de mici, încît efectele lor sînt adesea mascate de alte forme de magnetism, cum se întîmplă la solide.

Fără a intra în detalii, folosind teoria microscopic-clasică, să arătăm de cine depinde susceptivitatea magnetică la substanțele diamagnetice. În acest scop, să considerăm un electron în mișcare în jurul unui nucleu cu sarcina  $+e$ , pe o orbită de rază  $r$  cu viteza unghiulară  $\omega$ , în absența cîmpului magnetic (fig. 7.35). Momentul magnetic  $\mu$  asociat mișcării electronului este  $\mu = i \cdot S = (-\omega e/2\pi) \cdot \pi r^2$ .

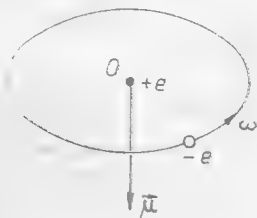


Fig. 7.35.

Prin aplicarea unui cîmp magnetic exterior, de inducție  $B$ , are loc o variație a fluxului magnetic prin aria orbitei și, conform legii lui Lenz, ia naștere un cîmp electric care se opune acestei variații. Acest lucru este valabil numai atunci cînd inducția magnetică variază de la zero pînă la valoarea maximă  $B$ . Cîmpul electric afectează mișcarea electronului prin exercitarea unei forțe care modifică frecvența unghiulară cu o valoare  $\omega_L$  numită frecvența Larmor:  $\omega_L = eB/(2m)$ , unde  $m$  este masa electronului. Momentul magnetic indus în acest fel este egal și de sens contrar momentului magnetic  $\mu$  al electronului pe orbită în absența cîmpului magnetic, astfel că atomii substanțelor diamagnetice, la introducerea lor în cîmp magnetic au momentul magnetic rezultat  $\mu_k = 0$ . Admitînd o simetrie sferică a sarcinilor electrice dintr-un solid, se obține pentru susceptivitate relația

$$\chi_{dia} = -NZ \cdot \mu_0 \frac{e^2}{6m} \cdot \bar{r}^2,$$

unde  $\bar{r}^2$  este media pătratului distanței electronilor față de nucleu. Se observă că la dielectrici  $\chi_{dia}$  nu depinde de

temperatură și nici de intensitatea cîmpului magnetic aplicat.

**Paramagnetismul** este o proprietate a unor anumite substanțe a căror molecule, atomi sau ioni au un moment magnetic permanent. Un cîmp extern de inducție  $\vec{B}$  determină o aliniere a acestor momente magnetice pe direcția și sensul cîmpului. Datorită agitației termice, echilibrul termodinamic la temperatura  $T$  constă numai dintr-o aliniere parțială.

La unele substanțe paramagnetice, numite normale (de exemplu, Pt, Pd etc.) susceptivitatea magnetică  $\chi$  variază invers proporțional cu temperatura, conform legii lui Curie.

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (C = \text{constanta Curie}),$$

în timp ce la alte substanțe, variația este dată de legea lui Curie-Weiss,

$$\chi = \frac{C}{T - T_c} \quad (T_c = \text{temperatura Curie}).$$

Magnetizarea  $M$  a unui solid paramagnetic în cîmpul magnetic  $H$  la temperatura  $T$  are următoarea expresie, dată de Langevin,

$$M = N \left( \operatorname{ctgh} \frac{\mu H}{kT} - \frac{kT}{\mu H} \right),$$

unde  $N$  este numărul de atomi din unitatea de volum, iar  $\mu$  este momentul magnetic al atomului paramagnetic.

Cînd  $\mu H/kT \ll 1$ , expresia din paranteză se simplifică, astfel încît ea devine  $\mu H/(3kT)$ , ceea ce înseamnă că constanta Curie este de forma:  $C = N\mu^2/(3k)$  și deci susceptivitatea magnetică va fi

$$\chi_{para} = \frac{N\mu^2}{3kT},$$

relația fiind valabilă pentru cîmpuri moderate, la temperaturi camerei; ea a fost obținută de Langevin, pe baza statisticii clasice.

Există totuși un grup de metale, din care fac parte metalele alcaline și alcalino-pămîntoase, care deși sînt paramagnetice, susceptivitatea lor magnetică este inde-

pendență de temperatură. Independența paramagnetismului de temperatură se poate explica pe baza statisticii cuantice, fenomenul datorându-se spinilor electronilor liberi din metalele respective. Este așa-numitul paramagnetism Pauli.

Pentru a explica acest tip de paramagnetism, să reconsiderăm teoria electronilor liberi dintr-un cristal de metal paramagnetic. În primă aproximație, teoria electronilor liberi poate fi considerată ca o teorie rudimentară a benzii de energie, în care electronii de valență ocupă două benzi, una conținând electronii cu  $m_s = +\frac{1}{2}$  și alta cu  $m_s = -\frac{1}{2}$ . În absența câmpului magnetic, cele două benzi parabolice au forma din figura 7.36, a, energia unui electron în ambele benzi fiind  $W$ . Considerând, de exemplu, un cristal monovalent format din  $N$  atomi, cei  $N$  electroni de valență vor ocupa  $N/2$  nivele energetice, adică vor fi ocupate toate nivelele aflate de la nivelul Fermi în jos. Pe fiecare nivel vor exista câte doi electroni cu spinii de sens contrar, astfel încît momentul magnetic rezultat de spin va fi nul.

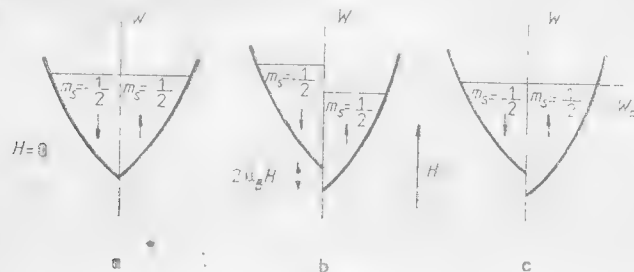


Fig. 7.36.

Prin aplicarea unui câmp magnetic  $\vec{H}$ , cele două benzi se deplasează una față de alta, astfel că spinii electronilor cu  $m_s = -\frac{1}{2}$  se vor orienta în sens contrar câmpului, iar spinii electronilor cu  $m_s = +\frac{1}{2}$  se vor orienta în același sens cu  $\vec{H}$ . În prezența câmpului magnetic, fiecare

electron primind energia suplimentară  $\mu_B H$ , rezultă că electronii cu spinii paraleli cu câmpul aplicat, au energia corespunzătoare limitei Fermi egală cu  $W_F - \mu_B H$ , în timp ce electronii cu spinii antiparaleli cu câmpul au energia  $W_F + \mu_B H$ . Or, aceasta înseamnă că diferența dintre energiile a doi electroni de pe același nivel energetic este  $2\mu_B H$  și că de fapt cele două benzi energetice sînt deplasate una față de alta cu  $2\mu_B H$  (fig. 7.36, b). Această situație necorespunzînd unui minim al energiei sistemului, înseamnă că o parte dintre electronii cu spinul antiparalel cu câmpul trec în banda a doua pînă la egalarea nivelelor Fermi în cele două benzi, astfel încît la un moment dat numărul electronilor cu spin paralel este mai mare în banda din dreapta față de cea din stînga (fig. 7.40, c). Excesul de electroni cu spinul orientat paralel cu câmpul magnetic față de electronii avînd spinul orientat antiparalel, determină o magnetizare totală,

$$M = N \mu_B^2 H / k T_F$$

și o susceptibilitate magnetică

$$\chi_{\text{para}} = \frac{M}{H} = N \frac{\mu_B^2}{k T_F},$$

unde  $T_F$  este temperatura Fermi. Această expresie, dedusă din considerentele teoriei cuantice arată că susceptibilitatea paramagnetică la unele substanțe este independentă de temperatură ( $T_F$  nefiind funcție de temperatura  $T$ ).

Cele două tipuri de magnetism, diamagnetismul și paramagnetismul nu prezintă fenomenul de ordonare magnetică, în sensul că substanțele ce prezintă asemenea forme de magnetism, în absența unui câmp exterior, fie că nu au momente magnetice (diamagneticele), fie au momentele magnetice orientate la întîmplare (paramagneticele) — fenomenul fiind observabil începînd chiar de la temperatura camerei, pentru unele substanțe.

**Feromagnetismul** este o proprietate comună unui grup special de substanțe, cum sînt Fe, Ni, Co precum și aliajele lor sau aliajul de tip Heusler ( $\text{Mn} - \text{Cu} - \text{Al}$ ) etc. Substanțele feromagnetice au mai multe proprietăți caracteristice: chiar în absența câmpului magnetic prezintă fenomenul de ordonare magnetică, adică au o magnetizație permanentă, deci un moment magnetic, care dispare peste o anumită temperatură caracteristică, numită tem-

peratură Curie,  $T_C$ , cînd feromagneticul se transformă în paramagnetic; au permeabilitatea relativă foarte mare în comparație cu cele diamagnetice și paramagnetice și dependentă de cîmpul aplicat; susceptivitatea lor magnetică este pozitivă și are valori foarte mari pentru  $T < T_C$ ; pentru temperaturi  $T > T_C$ , susceptivitatea variază cu temperatura după legea:  $\chi = C/(T - T_C)$ . În figura 7.37 este arătată această dependență pentru paramagnetice și feromagnetice.

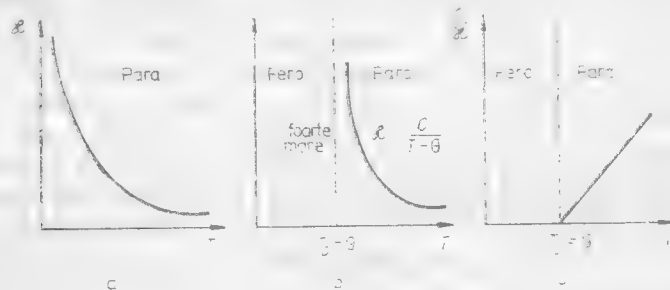


Fig. 7.37

O primă încercare de a explica feromagnetismul a fost făcută de Weiss, care postulează faptul că la substanțele feromagnetice, pe lângă cîmpul aplicat, care conduce la orientarea momentelor magnetice proprii, mai există o altă acțiune de orientare, echivalentă cu un cîmp magnetic, numită cîmp intern sau cîmp molecular. Acest cîmp intern fiind proporțional cu magnetizarea,  $\vec{H}_i = \lambda \vec{M}$  ( $\lambda$  — constanta cîmpului lui Weiss) — ar determina, conform lui Weiss, magnetizarea spontană a feromagneticului, deci alinierea momentelor magnetice din substanță.

Apariția momentului magnetic în timpul magnetizării a fost pusă în evidență în experiența lui Einstein-de Haas. În acest experiment, un mic cilindru din fier, suspendat printr-un fir elastic, se află în interiorul unui solenoid (fig. 7.38). Sensul de rotație a cilindrului se schimbă o dată cu schimbarea sensului curentului, deci a magnetizării.

În 1928, Heisenberg a presupus că forțele care sînt responsabile de orientarea momentelor magnetice atomice sînt forțe tipic cuantice. Mai exact, feromagnetismul se poate explica cuantic pe seama interacțiunii de schimb dintre electronii din păturile profunde și incomplete, electroni ce au momentele de spin orientate paralel.

În mod normal, spinii electronici din atom se compensează câte doi și deci feromagnetici pot fi numai acele materiale ai căror atomi au spinii necompensați.

La fier, de exemplu, pe pătura  $K$  sînt doi electroni cu spinii opuși, pe pătura  $L$  vor fi 8 electroni cu spinii opuși doi câte doi, în timp ce pe pătura  $M$ , din cei 14 electroni, 10 au spinii compensați, iar 4 electroni cu spinii orientați în același sens și necompensați și care se află în așa numita subgrupă  $d$ . Pe pătura următoare  $N$  sînt doi electroni cu spinii compensați.

La formarea cristalului de fier, între electronii vecini ai atomului apar forțe speciale care orientează paralel momentele magnetice de spin. Acestea se numesc forțe de schimb și sînt asemănătoare forțelor care leagă atomii de hidrogen într-o moleculă. Interacțiunea de schimb, care dă naștere la un efect de suprapunere parțială a norilor de electroni a doi atomi vecini (fig. 7.39), determină o schimbare în energia sistemului cu un termen

$$W_s = -2J\vec{s}_A \cdot \vec{s}_B,$$

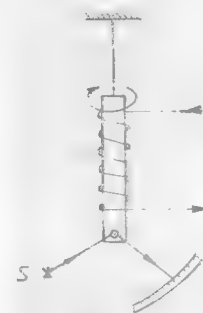


Fig. 7.38.

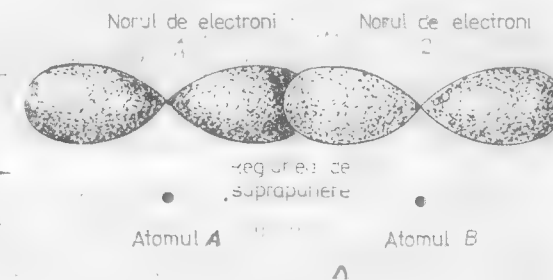


Fig. 7.39.

unde  $J$  este așa-numita integrală de schimb, care este o măsură a probabilității ca cei doi nori de electroni să se suprapună chiar parțial, iar  $\vec{s}_A$  și  $\vec{s}_B$  sînt spinii asociați electronilor celor doi atomi vecini care interacționează.

Situația favorabilă corespunde cazului cînd sistemul are energia cea mai mică, adică negativă și deci  $J > 0$ , caz în care spinii  $\vec{s}_A$ ,  $\vec{s}_B$  ai electronilor care formează legătura de schimb sînt paraleli.

S-a găsit chiar o regulă simplă care definește posibilitatea ca un material să fie feromagnetic: raportul dintre

parametrul rețelei cristaline și diametrul  $2R$  al subpăturii  $3d$  pe care se găsesc electronii cu spini necompensați, trebuie să fie egal sau mai mare decât 1,5, adică

$$\frac{d}{2R} \geq 1,5.$$

Din figura 7.40, în care este reprezentată dependența integralei de schimb de raportul  $d/2R$  pentru atomii metalelor de tranziție din grupa fierului, se observă că  $J > 0$  numai pentru Fe, Co, Ni, Gd, în timp ce pentru Mn, Cr integrala de schimb este negativă. Așadar, există două condiții

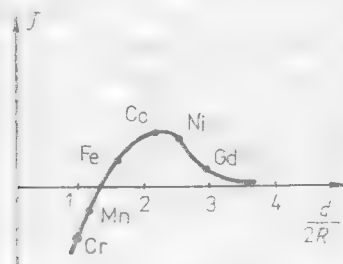


Fig. 7.40.

ca un material să fie feromagnetic: să aibă spini necompensați în subpăturile interne și integrala de schimb să fie pozitivă. În aceste condiții, când energia potențială a sistemului este minimă, există spini necompensați, orientați paralel, în aceeași direcție, care determină magnetizarea spontană a feromagneticilor.

Există o serie de proprietăți de material, printre care permeabilitatea, care depind de direcția aleasă dintr-un cristal. Dependența proprietăților magnetice de direcția aleasă se numește anizotropie magnetică. Materialele magnetice policristaline care se folosesc în tehnică sunt formate dintr-un număr mare de cristale ale căror axe sunt orientate în toate direcțiile. Aceste materiale sunt izotrope, iar proprietățile lor sunt aceleași în toate direcțiile. Atunci când materialele policristaline sunt supuse unor prefurări termomecanice, ele pot deveni anizotrope. De exemplu, în cazul laminării tablelor confecționate din materiale feromagnetice, axele cristalelor se dispun în deosebi pe direcția de laminare, materialul prezentând o așa-numită textură cristalografică, devenind anizotrop.

Pentru a putea explica și situații în care un corp feromagnetic nu este magnetizat în lipsa cîmpului aplicat, deși

se află la temperaturi  $T < T_c$ , Weiss a emis o ipoteză suplimentară, conform căreia corpurile feromagnetice reale sînt formate din domenii microscopice, în interiorul cărora magnetizația este egală cu magnetizația de saturație. Lipsa unei magnetizări macroscopice într-un feromagnet demagnetizat, dovedește că în acest caz direcțiile și sensurile de magnetizare ale domeniilor variază de la un domeniu la altul, astfel încît pe întreg feromagneticul se anulează reciproc (fig. 7.41).

Conform teoriei lui Weiss, prin aplicarea unui cîmp magnetic exterior, domeniile favorabil orientate își măresc volumul pe seama celor orientate nefavorabil, pînă cînd corpul devine un singur domeniu, iar în cîmpuri suficiente de puternice au loc procese rotaționale ale magnetizației domeniilor, în direcția și sensul cîmpului aplicat.

Trecerea de la un domeniu la altul nu se face brusc, ci printr-o regiune numită perete Bloch, după numele celui ce s-a ocupat primul cu acest subiect. În pereții de trecere de la un domeniu la altul, se produc variații importante de magnetizare, deci la cîmpuri intense în regiunile respective.

Atît domeniile de magnetizare spontană, cît și pereții Bloch pot fi puși în evidență prin experiența Bitter-Akulov. Pe suprafața unui feromagnetic se aplică o suspensie coloidală cu particule feromagnetice. Particulele sînt atrase spre regiunile cu cîmpuri mai intense, deci spre pereți, fiind puse în evidență aglomerări de particule cu ajutorul microscopului.

O proprietate caracteristică comună a substanțelor feromagnetice, aflate sub temperatura Curie, este relația dintre magnetizant  $M$  sau inducția magnetică  $B$  și cîmpul magnetizant  $H$ . Dacă se măsoară variația  $M = f(H)$  sau  $B = f(H)$  se obține curba de histeresis. O asemenea curbă este reprezentată în figura 7.42 și se referă la un feromagnetic care a fost inițial demagnetizat, moment căruia îi corespunde punctul  $O$  — originea sistemului de axe  $M - H$ . Mărinđ intensitatea cîmpului magnetizant, se obține curba de primă magnetizare  $OA$ , punctul  $A$  corespunzînd saturației. Dacă  $H$  scade, se obțin punctele  $M_r$  și  $H_c$ . După atingerea saturației negative și ureind din nou cîmpul magnetizant  $H$ , curba de histeresis se închide. Magnetizarea  $M_r$  corespunzătoare cîmpului magnetizant egal cu zero se numește magnetizare remanentă,



iar cîmpul  $H$ , corespunzător unei magnetizări nule se numește cîmp coercitiv.

Panta  $dM/dH$  din orice punct al curbei de histerezis determină susceptivitatea feromagnetică. În mod corespunzător, raportul  $dB/dH$  determinat din curba  $B = f(H)$  reprezintă permeabilitatea magnetică instantanee. Panta curbei determinată în punctul inițial al curbei de primă magnetizare definește susceptivitatea sau permeabilitatea inițială.

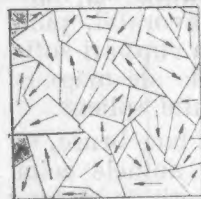


Fig. 7.41.

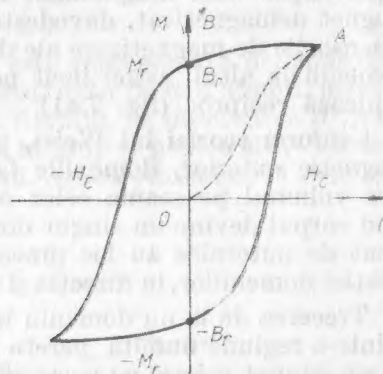


Fig. 7.42.

punzător, raportul  $dB/dH$  determinat din curba  $B = f(H)$  reprezintă permeabilitatea magnetică instantanee. Panta curbei determinată în punctul inițial al curbei de primă magnetizare definește susceptivitatea sau permeabilitatea inițială.

Energia consumată în procesul de magnetizare este proporțională cu aria delimitată de curba de histerezis,

$$W = \oint H dM = \frac{1}{\mu_0} \oint H dB.$$

Această energie se transformă ireversibil în căldură, datorită proceselor ireversibile care au loc în cursul magnetizării.

În funcție de forma curbei de magnetizare, materialele feromagnetice se clasifică în: a) feromagnetice moi cu ciclul de histerezis îngust, cîmpul coercitiv și inducția remanentă mici și permeabilitate inițială mare; b) feromagnetice dure, cu ciclul de histerezis lat, cîmpul coercitiv și inducția remanentă mare.

Fierul pur, aliajele Fe — Si, aliajele Fe — Ni de tipul permalloy sînt tipice feromagneticilor moi. Fierul fiind prea „moale” în sensul mecanic, se folosește în aliaje cu

Tabelul 7.3

Materialul	Compoziția (% de greutate, restul fiind fierul)	Permeabilitatea $\mu_r$		Cîmpul coercitiv, $H_c$ (A/m)	Inducție de saturatie, $B_s$ (Wb/m <sup>2</sup> )	Temperatura Curie, $T_c$ (°C)
		Inițială	Maximă			
Fier	0,05—0,2 (impurități)	200—5000	$10^4$ — $2 \cdot 10^5$	4—80	2,2	770
Fier-siliciu	0,5 Si	280	3000	71,6	2,1	765
Fier-siliciu	3,25 Si	290	8000	55,7	2,0	740
Permalloy	45 Ni	3500	$5 \cdot 10^4$	5,6	1,6	440
Permalloy	78 Ni, 3—4 Mo	15000	$10^5$	4	1,1	580
Mumetal	5 Cu, 4 Mo, 77 Ni	$5 \cdot 10^4$	$17,5 \cdot 10^4$	1,1	0,7	355
Supermalloy	5 Mo, 79 Ni	650	$10^4$	0,32	0,8	400



alte elemente, fapt ce conferă aliajului o anumită rigiditate mecanică și proprietăți magnetice noi. Un adaos de 4—5% siliciu crește rezistivitatea electrică de 5—6 ori față de fierul pur, conducând la scăderea magnetizării de saturație. Aliajele Fe—Ni au permeabilitatea foarte mare, însă o magnetizare de saturație mică. Aliajele cu cea mai mare magnetizare sunt cele de Fe—Co, numite și permindur.

Cîmpul coercitiv al feromagneticeilor moi este cuprins între cîteva miimi pînă la  $1-2 \times 10^{-2}$  A/m. Acest cîmp mic face ca aceste materiale să fie folosite în cîmpuri variabile la confecționarea tolelor de transformator, a electromagneților etc., deoarece pierderile prin histerezis sînt proporționale cu aria cuprinsă sub curba de histerezis care, la rîndul ei, este proporțională cu cîmpul coercitiv. Înainte de a fi folosite, feromagneticeile moi se supun unui tratament termic. De exemplu, aliajul compus din 78% Ni, 3—4% Mo și restul Fe — o altă varietate de permalloy, dacă este recopt la temperatura de 1100°C în vid sau în hidrogen și răcit cu viteză constantă, capătă proprietăți deosebite:  $H_c$  scade de zece ori, tocmai datorită tensiunilor interne din material, ce apar în timpul cristalizării. Cîteva proprietăți ale unor feromagnetice moi mai folosite sînt date în tabelul 7.3.

Materialele magnetice dure, avînd  $H_c$  mare,  $M_s$  și  $B_r$  mari, se folosesc la construcția magneților permanenți, deci ca surse de cîmp magnetic constant. Magneții din Fe—C sînt cunoscuți încă din secolul al XIII-lea. Mult mai recent au fost descoperite o varietate de aliaje cu proprietăți magnetice deosebite, care poartă nume comerciale, cum ar fi: alnico, triconal sau almax. Cîteva proprietăți mai deosebite ale unor aliaje folosite la producerea magneților permanenți sînt arătate în tabelul 7.4.

**Antiferomagnetismul** este o proprietate a unor substanțe cristaline, la care, în absența unui cîmp magnetic exterior, atomii vecini au momentele magnetice egale și orientate antiparalel, compensîndu-se unul pe altul, spre deosebire de feromagnetici, la care momentele magnetice sînt orientate paralel (fig. 7.43). Această proprietate o au o serie de metale și compuși cum sînt oxizii metalici: MnO, FeO, CoO sau MnS, CoCl<sub>2</sub> etc.

Din punct de vedere magnetic, structura acestor compuși poate fi privită ca formată din două subrețele magnetizate în sensuri opuse, a căror existență a fost pusă în

Tabelul 7.4

Materialul	Compoziția (în % de greutate, restul fiind fierul)	Cîmpul coercitiv, $H_c$ (A/m)	Inducția remanentă, $B_r$ (Wb/m <sup>2</sup> )	$(BH)_{max}$ (J/m <sup>3</sup> )
1% oțel carbon	1 C, 0,5 Mn	$4,1 \cdot 10^3$	0,9	$1,59 \cdot 10^3$
5% tungsten-oțel	5 W, 0,7 C	$5,6 \cdot 10^3$	1,05	$2,63 \cdot 10^3$
Alnico V	8 Al, 14 Ni, 24 Co	$49,3 \cdot 10^3$	1,25	$4,2 \cdot 10^4$
Platină-cobalt	77 Pt, 23 Co	$34,2 \cdot 10^4$	6,45	$7,6 \cdot 10^4$



Fig. 7.43.

evidență prin difracție neutronică. Alinierea antiparalelă a momentelor magnetice la antiferomagnetici poate fi descrisă, de asemenea, printr-o ecuație de forma

$$W_s = -J \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B,$$

în care pentru realizarea stabilității din punct de vedere termodinamic, adică a minimului energiei potențiale de interacțiune dintre doi atomi vecini A și B este necesar ca integrala de schimb să fie negativă.

La 0 K structura antiferomagneticului este ideală și momentele magnetice ale celor două subrețele se compensează reciproc, astfel că momentul total al antiferomagneticului este nul. Cu creșterea temperaturii, dispunerea antiparalelă a momentelor magnetice datorate spinilor electronilor se perturbă treptat, conducînd la o anumită magnetizare. Această structură antiferomagnetică poate exista pînă la o anumită temperatură caracteristică, numită temperatură Néel, cînd antiferomagneticul se transformă într-un paramagnetic. Crescînd în continuare temperatura, magnetizarea, respectiv susceptibilitatea magnetică, scade la fel ca la paramagnetici (fig. 7.44).

**Ferimagnetismul** este o proprietate a unor substanțe compuse la care atomii celor două subrețele considerate, deși au spinii antiparaleli, aceștia nu se compensează

reciproc, deci momentele lor magnetice nu sînt egale, datorită numărului diferit sau a naturii atomilor din subrețelele respective (fig. 7.43). Aceasta conduce la apariția unui moment magnetic total și deci la o magnetizare spontană a cristalului, chiar în absența unui câmp magnetic exterior.

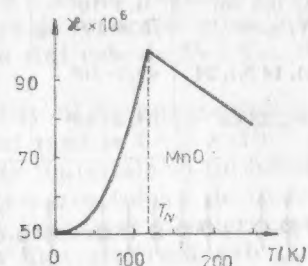


Fig. 7.44.

Deși substanțele ferimagnetice au unele proprietăți asemănătoare cu cele feromagnetice, din cauza structurii lor interne diferite, magnetizarea, respectiv susceptivitatea lor magnetică nu descrește monoton cu temperatura, putînd atinge valoarea zero înainte de atingerea temperaturii Néel.

Structura unui ferimagnetic poate fi considerată formată din două subrețele  $A$  și  $B$  de forma  $(M_1O)(M_2O_3)$  în care  $M_1$  și  $M_2$  sînt metale bi- și trivalente, de exemplu,  $MnOFe_2O_3$ ,  $MgOAl_2O_3$  etc. Atunci cînd metalul trivalent este fierul, substanțele ferimagnetice respective se mai numesc și ferite. Feritele se obțin din oxidul de fier, cunoscut și sub numele de magnetit ( $Fe_3O_4$ ), în care se înlocuiește unul din atomii de fier cu Mn, Zn, Ni etc.

Feritele au o serie de proprietăți deosebite față de alte substanțe: conductivitate electrică mică, curbă de histerezis de formă rectangulară etc. Întrucît în asemenea materiale nu se formează curenți turbionari, face ca ele să fie folosite în instalațiile de înaltă frecvență, de exemplu, ca miezuri pentru bobinele de inducție, transformatori în instalațiile radio și televiziune, automată, elemente de memorie în mașinile electronice de calcul etc.

## BIBLIOGRAFIE

1. Aczel O., *Analogii electro-mecanice*, „Revista Fiz.-Chim., A”, nr. 9 (1966).
2. Bădăriu E., Grumăzescu M., *Bazele acusticii moderne*, Ed. Academiei R.P.R., București, 1961.
3. Bărbulescu N. ș.a., *Teoria cinetico-moleculară a gazelor*, Ed. Științifică, București, 1972.
4. Bărbulescu N., *Bazele fizice ale relativității restrînse*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1975.
5. D. Bărcă, Gălățeanu ș.a. *Fizica*, vol. 1 și 2, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1971.
6. Born M., *Teoria relativității, a lui Einstein*, Ed. Științifică, București, 1969.
7. Bursuc D. I., *Suprafața Fermi*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1979.
8. Cașu Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, Ed. Academiei R. P. R., 1952.
9. Chelu I., *Funcția metodică a modelului*, „Revista Fiz.-Chim., A”, nr. 11 (1968).
10. Constantinescu E., Csengeri E., *Folosirea modelării în învățarea fizicii și a biologiei*, „Revista de Psihologie”, nr. 2 (1974).
11. Coles B. R., Caplin A. D., *The Electronic Structures of Solids*, Ed. Arnold, London, 1976.
12. Craik D. I., *Structure and Properties of Magnetic Materials*, Pion Limited, London, 1971.
13. Dimboiu E., Sima P., *Cu privire la unele analogii mecanice și electrice*, „Revista Fiz.-Chim., A”, nr. 3 (1969).
14. Crangle I., *The Structures and Properties of Solids*, Ed. Arnold, London, 1977.
15. Dugdale S. I., *The Electrical Properties of Metals and Alloys*, Ed. Arnold, London, 1977.
16. Garnier J., *Introduction a l'étude de champs physique*, Ed. Dunod, Paris, 1941.
17. Halliday D., Resnick R., *Fizica*, vol. II, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975.
18. Hesse M., *Models in Physics*, in „The British Journal for Philosophy of Science”, vol. 6, Nr. 24, 1955.
19. Hutten E. H., *The Role of Models in Physics*, in „The British Journal for Philosophy of Science”, vol. 4, nr. 16, 1954.

20. Ionescu G., *Analogii în fizică și posibilitatea modelării prin analogie. Cazul ecuațiilor de propagare*, „Revista Fiz. Chim. A”, nr. 2 (1970).
21. Karplus J. W., *Analog Simulation*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. London, 1958.
22. Korchounov Y., *Fundaments mathematiques de la cybernetique*, Ed. Mir, Moscou, 1971.
23. Landau L., Lifchitz E., *Mecanica de fluide*, Ed. Mir, Moscou, 1971.
24. Levy A. R., *Principles of Solid State Physics*, Academic Press, London, 1960.
25. Lița I., *Fizica metalelor și aliajelor*, Tipografia Univ. Buc., 1980.
26. Littlefield A. T., Thorley N., *Atomic and Nuclear Physics*, Van Nostrand Reinhold, London, 1979.
27. Lovel, Avery and Vernon, *Physical Properties of Materials*, Van Nostrand Reinhold, London, 1979.
28. Luca E., *Elemente de fizică modernă*, Ed. Junimea, Iași, 1974.
29. Marinescu I., *Asupra teoriei modelării ca instrument de cercetare în fizică*, „Rev. Fiz. Chim. A”, nr. 6 (1973).
30. Matveev H. A., *Molekularnaya fizika*, Vissiaia škola, Moskva, 1981.
31. Moisil C. G., *Fizica pentru ingineri*, Ed. Tehnică, București, 1968.
32. \* \* \* — *Models and analogues in biology*, Cambridge Univ. Press 1960.
33. Moțoc C., *Fizica solidului*, Editura Didactică și Pedagogică, 1968.
34. Murgulescu G. I., Segal E., *Introducere în chimia fizică*, vol. II, Ed. Academiei R.S.R., București, 1979.
35. Nemirovski E., *Sovremenie modeli atomnogo iadra*, Atomizdat, Moskva, 1960.
36. Nicolau Ed., *Analogie, modelare, simulare cibernetică*, Ed. Științifică, și Enciclopedică, București, 1977.
37. Pustovalov E. G., *Atomnaya i iadernaya fizika*, Izd. Moskv. Univ. 1969.
38. Razumihiri A., *Modèles physiques et mathématiques*, Edition Mir, Moscou, 1975.
39. R. Saint-Guilhem, *Les principes généraux de la similitude physique*, Edition Eyrolles, Paris, 1971.
40. Shannon R., *System simulation*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1975.
41. Smith R. A., *Semiconductor*, ed. II. Cambridge University Press, 1978.
42. Tilley E. D., *University Physics*, Cuminings Publishing Comp., London, 1976.
43. Tomescu M. O., *Modelarea în predarea fizicii*, autoreferat, București, 1978.
44. Tudose C., *Fizica atomică și nucleară*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1970.
45. Tudose C., *Mecanică fizică, acustică și căldură*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1976.
46. Tudose C., Cucurezeanu I., Velican N. ș.a., *Fizica*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
47. Wenham ș.a., *Physics Concepts and Models*, Addison-Wesley Publ., London, 1972.
48. Wright H. C., *Elementary Semiconductor Physics*, Van Nostrand Reinhold, London, 1979.